Lei 19,10

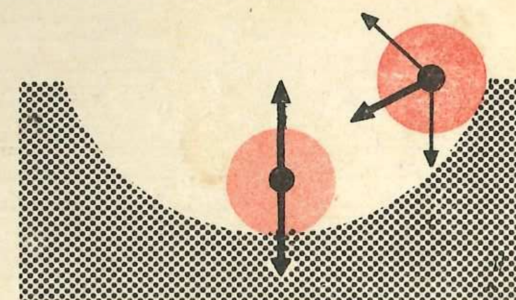
EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI – 1988

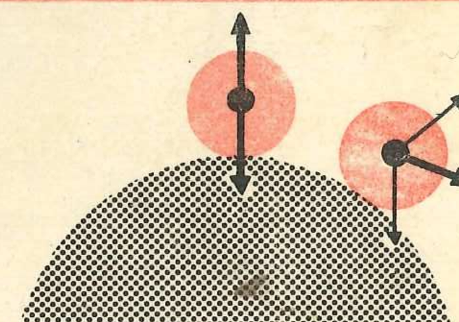
IX

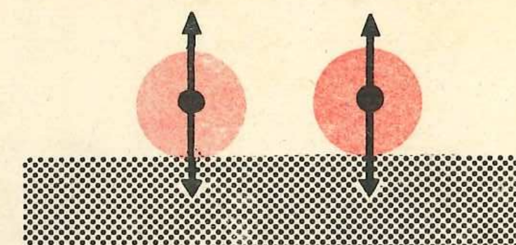
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI

Fizică

Manual pentru clasa a IX-a

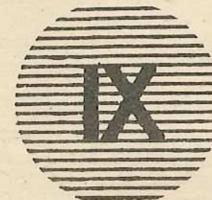






MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

ANATOLIE HRISTEV VASILE FĂLIE DUMITRU MANDA



Fizică

Manual pentru clasa a IX-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat pe baza programei aprobate de M.E.Î. cu nr. 3448/28 IV 1979 şi avizat de Comisia de fizică a M.E.Î.
Revizuit în 1981.

Cap. 1; 2; 3 (§ 1 – 5); 5 şi 6 au fost elaborate de *A. Hristev*
Cap. 4; 8 şi 9 au fost elaborate de *V. Fălie*
Cap. 3 (§ 6 – 8); 7 şi 10 au fost elaborate de *D. Manda*

REFERENŢI:

C. VREJOIU, conf. dr. Facultatea de Fizică – Bucureşti
C. CRISTESCU, şef de lucrări I.P. Bucureşti
I. POPA, profesor
A. PETRESCU, profesor
PAUL ŞTEFĂNESCU, şef lucrări

Redactor: ELISABETA MESAROŞ prof.
Tehnoredactor: PARASCHIVA GAŞPAR
Coperta: NICOLAE SÎRBU

CUPRINS

CAP. 1. MIŞCAREA ŞI REPAUSUL

1.1. Sistem de referinţă 7
1.2. Punct material 8
1.3. Traiectorie. Coordonate. Legea mişcării 9
1.4. Vector de poziţie 11
1.5. Deplasare 12
1.6. Mărimi vectoriale 14
1.7. Viteza 18
1.8. Acceleraţia 23
1.9. Clasificarea mişcărilor punctului material 26
1.10. Relativitatea mişcării mecanice 27
1.11. Compunerea mişcărilor 28
1.12. Reprezentarea grafică a legii mişcării 29
Probleme rezolvate 31
Întrebări. Exerciţii. Probleme 32

CAP. 2. PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

2.1. Principiul inerţiei 34
2.2. Sisteme de referinţă inerţiale 35
2.3. Principiul fundamental al dinamicii 38
2.4. Principiul acţiunilor reciproce 44
2.5. Principiul suprapunerii forţelor 48
2.6. Principiul relativităţii în mecanica newtoniană 51
Probleme rezolvate 52
Întrebări. Exerciţii. Probleme 57

CAP. 3. MIŞCAREA PUNCTULUI MATERIAL SUB ACŢIUNEA UNOR TIPURI DE FORŢE

3.1. Mişcarea rectilinie uniformă 60
Probleme rezolvate 62
Întrebări. Exerciţii. Probleme 62

3.2. Mişcarea rectilinie uniform variată 64
Probleme rezolvate 69
Întrebări. Exerciţii. Probleme 71
3.3. Mişcarea corpurilor sub acţiunea greutăţii 72
Probleme rezolvate 77
Întrebări. Exerciţii. Probleme 80
3.4. Forţele de frecare 83
Probleme rezolvate 92
Întrebări. Exerciţii. Probleme 94
3.5. Mişcarea circulară uniformă 96
Problemă rezolvată 105
Întrebări. Exerciţii. Probleme 106
3.6. Forţe elastice 108
Probleme rezolvate 111
Întrebări. Exerciţii. Probleme 112
3.7. Legea atracţiei universale a lui Newton. Cîmpul gravitaţional 113
3.8. Masa gravifică. Relaţia dintre masa gravifică şi masa inerţială. Sateliţii artificiali 119
Problemă rezolvată 122
Întrebări. Exerciţii. Probleme 122

CAP. 4. ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ŞI A SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE

4.1. Lucrul mecanic efectuat la mişcarea punctului material într-un cîmp de forţe 124
4.2. Energia cinetică. Teorema variaţiei energiei cinetice a punctului material 135
4.3. Energia potenţială a punctului material în cîmp conservativ de forţe. Energia mecanică a punctului material în cîmp conservativ de forţe 139
4.4. Conservarea energiei mecanice 144
4.5.* Sisteme de puncte materiale. Forţe interne şi forţe externe 145
Probleme rezolvate 147
Întrebări. Exerciţii. Probleme 148

CAP. 5. IMPULSUL MECANIC

5.1. Teorema impulsului pentru punctul material. Conservarea impulsului 153
5.2. Teorema impulsului şi legea conservării impulsului pentru un sistem de două particule 154
5.3.* Teorema impulsului şi legea conservării impulsului pentru un sistem oarecare de particule 155
5.4. Centrul de masă al unui sistem de două particule 156

5.5.* Centrul de masă al unui sistem oarecare de particule 158
5.6. Ciocniri 159
Probleme rezolvate 167
Întrebări. Exerciţii. Probleme 168

CAP. 6. MOMENTUL CINETIC

6.1. Momentul forţei. Momentul cinetic al punctului material 172
6.2. Teorema momentului cinetic pentru punctul material. Conservarea momentului cinetic 177
6.3*. Teorema momentului cinetic total al unui sistem mecanic. Conservarea momentului cinetic total 178
Întrebări. Exerciţii. Probleme 179

CAP. 7*. CINEMATICA ŞI DINAMICA RIGIDULUI

7.1. Noţiunea de rigid 181
7.2. Viteza şi acceleraţia unghiulară 181
7.3. Energia cinetică de rotaţie. Momentul de inerţie al unui rigid 184
7.4. Legile cinematicii şi dinamicii solidului rigid 186
Probleme rezolvate 190
Întrebări. Exerciţii. Probleme 192

CAP. 8. ECHILIBRUL MECANIC AL CORPURILOR

8.1. Sistem de forţe concurente. Rezultanta. Mişcarea de translaţie 193
8.2. Compunerea forţelor paralele. Cuplul de forţe. Mişcarea de rotaţie 197
8.3. Centrul de greutate 204
8.4. Echilibrul mecanic. Condiţii de echilibru 208
8.5. Echilibrul în cîmp gravitaţional. Echilibrul şi energia potenţială 217
Întrebări. Exerciţii. Probleme 220

CAP. 9. MECANICA FLUIDELOR

9.1. Starea fluidă 225
9.2. Noţiunea de presiune 226
9.3. Statica fluidelor: hidrostatica şi aerostatica 227
9.4. Dinamica fluidelor 244
Întrebări. Exerciţii. Probleme 252

CAP. 10. UNDE ELASTICE. NOŢIUNI DE ACUSTICĂ

10.1 Oscilatorul liniar armonic. Compunerea oscilaţiilor 255
10.2. Pendulul gravitaţional. Rezonanţa 267
10.3. Propagarea mişcării oscilatorii 270

10.4. Unde transversale, unde longitudinale. Viteza de propagare 274
10.5. Ecuaţia undei plane 282
10.6. Clasificarea undelor elastice după frecvenţă 285
10.7. Condiţii de audibilitate a oscilaţiilor elastice 285
10.8. Reflexia şi refracţia undelor 286
10.9. Difracţia 292
10.10. Interferenţa. Unde staţionare 293
10.11.* Coarde şi tuburi sonore 300
Întrebări. Exerciţii. Probleme 302
Probleme recapitulative 307

1

MIŞCAREA ŞI REPAUSUL

Fizica studiază diferite fenomene ale naturii: mecanice, termice, electrice, optice, atomice etc. Cel mai simplu dintre ele este *mişcarea mecanică*, studiată în cadrul *mecanicii.*

Mecanica, numită *clasică newtoniană*, a fost elaborată în esenţă de ISAAC NEWTON (1643—1727) şi expusă în celebra sa carte *„Principiile matematice ale filozofiei naturale"* (1687), unde sînt formulate cele trei legi sau *principii* ale mecanicii, precum şi legea atracţiei universale (gravitaţionale) (aplicată la mişcarea sistemului solar).

Mecanica se împarte de obicei în trei capitole: *cinematica* se ocupă cu descrierea geometrică, spaţio-temporală, a mişcării (coordonate, timp, traiectorie, viteză, acceleraţie); *dinamica* studiază şi cauzele mişcării (forţele, impulsul, lucrul mecanic, energia); *statica* studiază echilibrul corpurilor. Mecanica se mai împarte în: mecanica punctului material, mecanica sistemului de puncte materiale, mecanica solidului rigid, mecanica fluidelor etc.

În capitolul 1 sînt expuse noţiuni de cinematică a punctului material.

1.1. SISTEM DE REFERINŢĂ

Deplasările oamenilor, mişcările diferitelor piese ale maşinilor unelte, deplasarea vehiculelor, curgerea apelor, curenţii de aer — iată exemple de *mişcări mecanice.*

Cînd vorbim de mişcarea mecanică a unui corp, înţelegem totdeauna schimbarea poziţiei sale *faţă de alte corpuri*, de obicei faţă de Pămînt sau faţă de diferite obiecte fixe pe Pămînt (case, borne kilometrice etc.).

Se numeşte *mişcare mecanică* a unui corp schimbarea poziţiei sale faţă de alte corpuri.

Repausul este un caz particular al mişcării: un corp este în repaus dacă poziţia sa faţă de alte corpuri nu se schimbă.

Pentru a studia mişcarea unui corp trebuie să alegem totdeauna un alt corp, numit *corp de referinţă* (de exemplu, Pămîntul), la care să raportăm în fiecare moment poziţia corpului studiat. Desigur, orice corp de referinţă este la rîndul său în mişcare faţă de alte corpuri. Pentru a determina *poziţia* corpului studiat la diferite *momente* sînt necesare o *riglă* şi un *ceasornic.*

Corpul de referinţă, împreună cu rigla pentru determinarea poziţiei corpurilor studiate şi cu ceasornicul pentru indicarea momentului, constituie un *sistem de referinţă*, numit pe scurt *referenţial.*

1.2. PUNCT MATERIAL

În mişcarea mecanică a corpurilor nu sînt determinante unele proprietăţi ale acestora, de exemplu, cele termice, cele optice, şi de aceea le putem neglija. În multe probleme nu ne interesează nici deformarea corpurilor, de exemplu, la căderea şi aruncarea obiectelor, de aceea în astfel de probleme o putem neglija, considerînd corpul *rigid.*

Mişcarea solidului rigid este totuşi complicată, de aceea se studiază mai întîi mişcarea unui corp ale cărui dimensiuni şi rotaţii proprii sînt neglijabile în problema dată. Acesta este *punctul material*, caracterizat numai prin *masa* sa (deci un corp cu dimensiuni neglijabile faţă de distanţele sale pînă la corpurile înconjurătoare).

Un acelaşi corp poate fi considerat punct material într-o problemă şi într-o altă problemă, *nu.*

De exemplu, în mişcarea unui vapor pe ocean, dimensiunile sale nu sînt esenţiale şi pot fi neglijate (fig. 1.1), însă în cazul manevrării în rada unui port, ele nu pot fi neglijate. O piatră în mişcarea sa în atmosferă poate fi

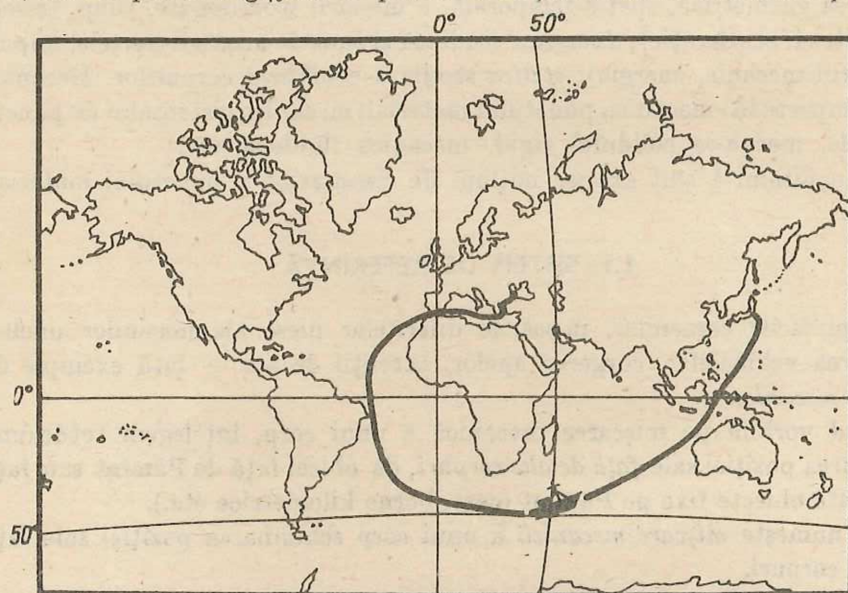


Fig. 1.1. Un vapor pe un ocean se poate aproxima printr-un punct a cărui poziţie în fiecare moment este dată de coordonatele sale geografice: latitudinea şi longitudinea.

aproximată de cele mai multe ori printr-un punct material, nu însă, de exemplu, în cazul rostogolirii sale pe o suprafaţă.

Cînd toate punctele unui corp se mişcă *identic* (mişcarea de *translaţie*), atunci mişcarea unui singur punct oarecare al corpului caracterizează pe deplin mişcarea întregului corp, indiferent de dimensiunile acestuia, deci putem aplica modelul punctului material.

Dacă nu interesează masa corpului (în cinematică), punctul material se numeşte *mobil.*

1.3. TRAIECTORIE. COORDONATE. LEGEA MIŞCĂRII

Curba descrisă de un mobil în timpul mişcării sale se numeşte *traiectorie* (fig. 1.2). Traiectoria poate fi rectilinie sau curbilinie. Traiectoria curbilinie poate fi situată: într-un plan — mişcare *plană* (de exemplu, mişcarea circulară), sau în spaţiu (de exemplu, mişcarea unui punct periferic al unui şurub).

Mişcarea rectilinie şi mişcarea circulară sînt cele mai simple şi mai frecvente mişcări.

1.3.1. **Cazul mişcării rectilinii.** Pentru a determina poziţia corpului în fiecare moment, alegem pe dreapta mişcării un punct origine O şi un sens pozitiv (obţinem astfel axa coordonatelor Ox). *Coordonata* x a corpului este distanţa de la originea O pînă la corp, prevăzută cu semnul plus sau minus,

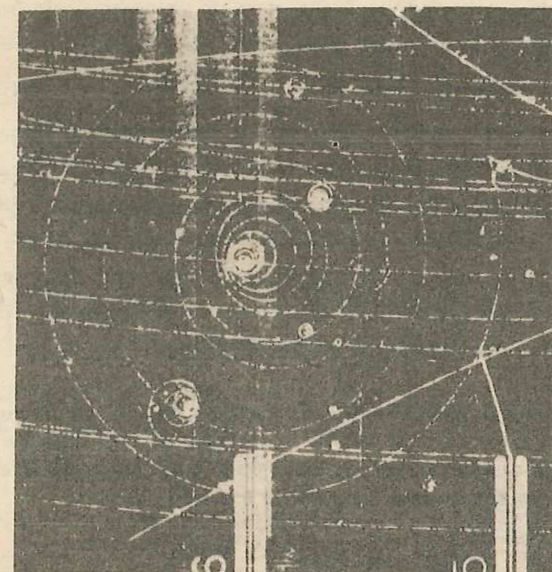


Fig. 1.2. Particulele atomice deplasîndu-se în camera cu ceaţă determină în drumul lor formarea unor picături fine de apă (vizibile la microscop prin iluminare laterală).

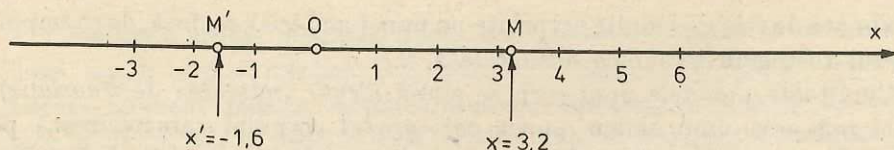


Fig. 1.3. Poziția mobilului pe traiectoria sa rectilinie este determinată de coordonata sa x. Coordonata este pozitivă dacă mobilul se află de partea pozitivă a axei (M) și este negativă, dacă mobilul este de partea cealaltă (M').

după cum corpul se află de partea pozitivă sau de cea negativă a axe (fig. 1.3).

Pentru a descrie mișcarea mobilului pe traiectoria sa rectilinie trebuie să cunoaștem poziția mobilului în fiecare moment pe această traiectorie, adică coordonata sa x în funcție de timpul t:

$$x = f(t).$$

Această expresie constituie *legea mișcării* (ecuația cinematică a mișcării).

1.3.2. **Cazul mișcării într-un plan.** Pentru a determina poziția corpului în fiecare moment, alegem *două axe* de coordonate Ox, Oy, perpendiculare între ele, situate în planul mișcării. Poziția M a corpului este dată de cele *două* coordonate: x (abscisa) și y (ordonata), care se obțin ducînd din M paralele la axele de coordonate (fig. 1.4). Pentru a descrie mișcarea corpului (în plan) trebuie să cunoaștem coordonatele sale (x, y) în funcție de timpul t, adică *două* funcții:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

(ecuațiile cinematice ale mișcării). Fiecare ecuație descrie mișcarea proiecției mobilului pe axa respectivă sau mișcarea mobilului în direcția axei respective (de exemplu, spre Est sau spre Nord). Mișcarea plană a mobilului se descompune astfel în două mișcări rectilinii după cele două axe alese.

Se pot alege și alte sisteme de coordonate pentru a descrie poziția și mișcarea mobilului, de exemplu poziția unui vapor pe ocean este dată de coordonatele sale geografice: latitudinea și longitudinea (fig. 1.1).

1.3.3. **Cazul mișcării în spațiu.** Alegem un sistem de trei axe de coordonate Ox, Oy, Oz, perpendiculare între ele. Atunci poziția mobilului M este dată de *trei* coordonate: x (abscisa), y (ordonata) și z (cota), care se obțin ducînd din M paralele la axe, ca în figura 1.5. Mișcarea corpului în spațiu este descrisă de *trei* ecuații:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

(ecuațiile cinematice ale mișcării).

Ele descriu mișcarea corpului în spațiu după cele trei direcții.

Se pot alege și alte sisteme de coordonate pentru a determina poziția mobilului în spațiu.

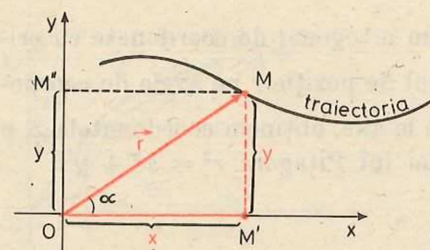


Fig. 1.4. Poziția unui mobil în plan este dată de cele două coordonate ale sale: abscisa $x = OM'$ și ordonata $y = M'M = OM''$. Abscisa x și ordonata y se obțin proiectînd pe axele de coordonate vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, ($x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$). Proiecțiile se obțin ducînd din vîrful vectorului de poziție $\vec{r}$ paralele la axele de coordonate.

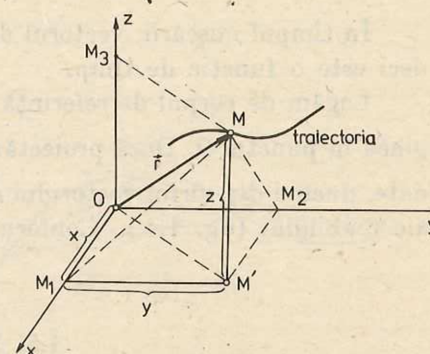


Fig. 1.5. Poziția mobilului în spațiu este dată de cele trei coordonate ale sale: abscisa $x = OM_1$, ordonata $y = M_1M' = OM_2$ și cota $z = M'M = OM_3$. Coordonatele x, y, z se obțin proiectînd pe axele de coordonate vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

1.4. VECTOR DE POZIȚIE

Un alt mod de a preciza poziția unui mobil este următorul: alegem pe corpul de referință un punct-origine O și îl unim cu mobilul M, obținem astfel segmentul de dreaptă orientat $\overrightarrow{OM}$ (fig. 1.4—1.5), numit *vector de poziție* al mobilului, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

El este caracterizat prin:

1) *modul* (sau mărime) dat de lungimea $r = OM$ a segmentului orientat $\overrightarrow{OM}$;

2) *direcție*, dată de dreapta definită de punctele O, M, și

3) *sens*, dat de succesiunea $O—M$, origine-mobil.

Cunoașterea vectorului de poziție (ca modul, direcție și sens) înseamnă cunoașterea poziției în spațiu a mobilului.

De exemplu, o instalație radar determină vectorul de poziție al unui obiect-țintă (avion) cu ajutorul unui impuls de unde electromagnetice (radio) dirijat în spațiu. Știind viteza de propagare a undelor (c = 300 000 km/s) și măsurînd timpul de propagare dus-întors a semnalului, găsim distanța r pînă la obiect. Direcția este dată de orientarea antenei emițătoare (fig. 1.6).

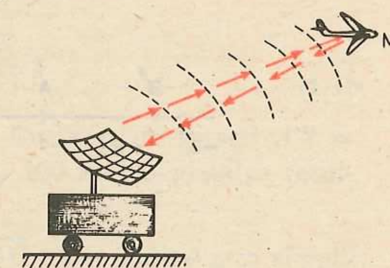


Fig. 1.6. Instalația radar determină vectorul de poziție al obiectului reperat.

În timpul mişcării, vectorul de poziţie se schimbă ca modul şi orientare, deci este o funcţie de timp.

Legăm de corpul de referinţă un sistem ortogonal de coordonate cu originea în punctul O. Dacă proiectăm vectorul de poziţie $\vec{r}$ pe axele de coordonate, ducînd din vîrful vectorului $\vec{r}$ paralele la axe, obţinem coordonatele x, y ale mobilului (fig. 1.4). Conform teoremei lui Pitagora $r^2 = x^2 + y^2$.

1.5. DEPLASARE

1.5.1. **Cazul mişcării rectilinii.** Fie $A(x_1)$ şi $B(x_2)$ poziţiile mobilului la momentele t_1, respectiv t_2 (fig. 1.7). Deplasarea mobilului în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ este segmentul AB (prevăzut cu semn) $\Delta x = x_2 - x_1$. Litera Δ (delta majusculă) scrisă în faţa unei mărimi înseamnă variaţia acelei mărimi, adică diferenţa dintre valoarea finală şi cea iniţială.

Deplasarea mobilului în mişcarea rectilinie este variaţia coordonatei sale.

Deplasarea Δx este pozitivă dacă mobilul se mişcă în sensul pozitiv al axei ($\Delta x > 0$, $x_2 > x_1$) şi negativă dacă mobilul se mişcă în sensul negativ ($\Delta x < 0$) (fig. 1.7).

1.5.2. **Cazul mişcării plane.** Fie A, B poziţiile mobilului la momentele t_1, respectiv t_2 (fig. 1.8). Dacă urmărim proiecţiile mobilului pe axe, se vede că $A'B' = \Delta x = x_2 - x_1$, respectiv $A''B'' = \Delta y = y_2 - y_1$, reprezintă deplasările în direcţiile axelor respective.

Unind poziţia iniţială $A(t_1)$ a mobilului cu cea finală $B(t_2)$ obţinem segmentul de dreaptă orientat $\overrightarrow{AB}$ care se numeşte *vectorul deplasare* al mobilului în intervalul de timp considerat $\Delta t = t_2 - t_1$.

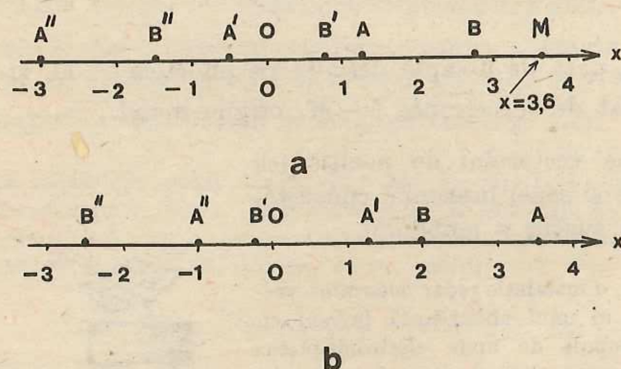


Fig. 1.7. Deplasările AB, $A'B'$, $A''B''$ ale mobilului M în cazul (a) sînt pozitive (mobilul se mişcă în sensul pozitiv al axei Ox), în cazul (b) sînt negative (mobilul se mişcă în sensul negativ al axei Ox).

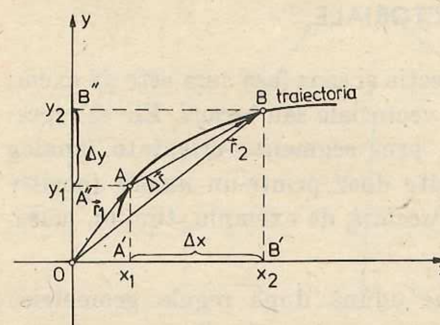


Fig. 1.8. Vectorul deplasare al mobilului $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ are drept componente deplasările pe axe $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ care se obţin prin proiecţie, ducînd din originea A şi vîrful B paralele la axele de coordonate.

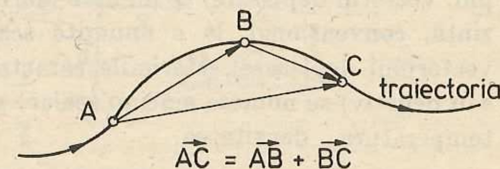


Fig. 1.9. Deplasarea rezultantă $\overrightarrow{AC}$ este suma vectorială a deplasărilor componente $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$.

El este caracterizat de *modul* (lungimea segmentului AB), *direcţie* (dată de dreapta care trece prin A şi B) şi *sens* (de la A la B).

Dacă proiectăm vectorul deplasare $\overrightarrow{AB}$ pe axele de coordonate, ducînd din originea A şi din vîrful B paralele la axele de coordonate, obţinem deplasările pe axele de coordonate:

$$A'B' = \Delta x = x_2 - x_1, \quad A''B'' = \Delta y = y_2 - y_1.$$

Fie un mobil care se mişcă pe o traiectorie curbilinie oarecare (fig. 1.9) şi fie A, B, C poziţiile sale succesive la momentele t_1, t_2, t_3. Deplasarea în intervalul de timp (t_1, t_2) este vectorul $\overrightarrow{AB}$, iar în intervalul de timp (t_2, t_3) este $\overrightarrow{BC}$. Care este deplasarea „globală“ sau rezultantă în intervalul de timp (t_1, t_3)?

Evident, este vectorul $\overrightarrow{AC}$, care se obţine unind originea primei deplasări cu vîrful ultimei deplasări. Se spune că vectorul deplasare $\overrightarrow{AC}$ este *suma* vectorilor deplasare $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{1.1}$$

De exemplu, un avion se deplasează de la Bucureşti la Piteşti $AB = 105$ km şi apoi de la Piteşti la Braşov $BC = 100$ km. Deplasarea rezultantă Bucureşti—Braşov este $AC = 140$ km.

Se vede că mărimea deplasării rezultante $\overrightarrow{AC}$ nu se obţine prin simplă adunare *aritmetică* a mărimilor deplasărilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$, ci după regula geometrică de mai sus.

1.6. MĂRIMI VECTORIALE

Mărimile caracterizate prin modul, direcţie şi sens (aşa cum este de exemplu, vectorul deplasare) se numesc mărimi vectoriale sau *vectori*. Ele se reprezintă, convenţional, la o anumită scară, prin segmente orientate (analog vectorului deplasare). Mărimile caracterizate doar printr-un *număr* (pozitiv sau negativ) se numesc mărimi scalare sau *scalari*, de exemplu, timpul, masa, temperatura, densitatea.

1.6.1. **Adunarea vectorilor.** Vectorii se adună după regula geometrică dată la vectorii deplasare. Pentru a aduna doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ îi desenăm (la o anumită scară) unul cu originea în extremitatea celuilalt şi unim originea primului vector cu vîrful celui de-al doilea vector (fig. 1.10). Acest vector de închidere va da suma celor doi vectori.

Dacă în figura 1.10 ducem din originea primului vector $\vec{a}$ un vector paralel şi egal cu vectorul $\vec{b}$, obţinem un paralelogram a cărui diagonală reprezintă suma celor doi vectori. De aici rezultă:

Regula paralelogramului. *Suma a doi vectori este dată de diagonala paralelogramului construit cu cei doi vectori componenţi ca laturi, avînd origine comună.*

Din această construcţie se vede că suma vectorială este *comutativă*:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \qquad (1.2)$$

Dacă avem mai mulţi vectori suma lor se obţine aplicînd succesiv regula paralelogramului. Acelaşi rezultat se obţine direct cu ajutorul regulii poligonului.

Regula poligonului. *Suma mai multor vectori este dată de linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenţi* (fig. 1.11).

Aplicînd regula paralelogramului sau cea a poligonului pentru trei vectori, ne convingem că adunarea vectorilor este *asociativă:*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \qquad (1.3)$$

Orice diagramă de compunere a doi vectori (de exemplu, cea din fig. 1.10) poate fi privită şi ca o *descompunere* a unui vector în doi vectori compo-

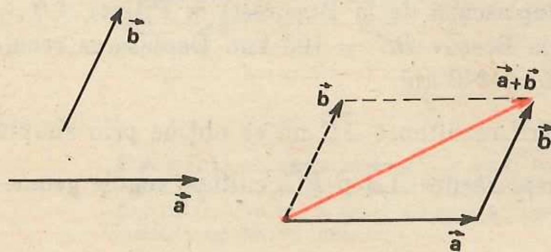


Fig. 1.10. Vectorii se adună după regula paralelogramului.

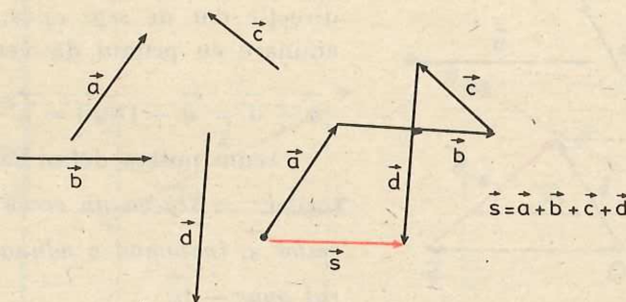


Fig. 1.11. Suma mai multor vectori este dată de linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenţi.

nenţi. În adevăr, orice vector poate fi descompus după *două* direcţii arbitrare *coplanare* cu vectorul dat (sau după *trei* direcţii arbitrare *în spaţiu*), deci poate fi înlocuit cu vectorii *componenţi*. Pentru aceasta ducem prin originea şi prin vîrful vectorului dat drepte paralele cu direcţiile date (fig. 1.12). Se formează astfel paralelogramul de compunere a vectorilor.

Astfel, de exemplu, vectorul de poziţie $\vec{r}$ din figura 1.4 are drept vectori componenţi pe $\overrightarrow{OM'}$ şi $\overrightarrow{OM''}$:

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$. Analog în spaţiu (fig. 1.5):

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

1.6.2. **Scăderea vectorilor.** Dacă modulul unui vector se reduce la zero, se obţine vectorul zero (nul), notat cu 0, ca şi numărul zero; direcţia vectorului zero rămîne nedeterminată. De exemplu, dacă adunînd mai mulţi vectori linia poligonală se închide, suma vectorilor respectivi este zero. În particular, dacă adunăm doi vectori egali în modul, de aceeaşi direcţie dar de sensuri opuse, obţinem vectorul zero. De aici se vede că oricărui vector nenul $\vec{a}$ îi corespunde un *vector opus* $\vec{a}' = -\vec{a}$, de acelaşi modul, de aceeaşi

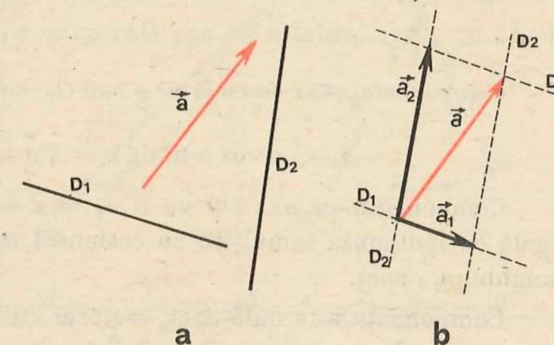


Fig. 1.12. Descompunerea unui vector $\vec{a}$ după două direcţii date D_1, D_2 coplanare cu vectorul dat $\vec{a}$.

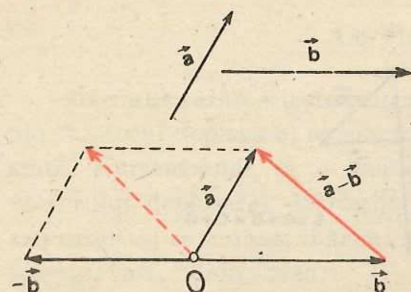


Fig. 1.13. Scăderea vectorilor: diferența este dată de cealaltă diagonală a paralelogramului.

direcție dar de *sens opus*, care prin adunare cu primul dă vectorul zero:

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = 0.$$

Acum putem defini scăderea vectorilor: *a scădea un vector* $\vec{b}$ *dintr-un vector* $\vec{a}$, *înseamnă a aduna la* $\vec{a}$ *vectorul opus* $-\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \quad (1.4)$$

Din figura 1.13 se vede că diferența a doi vectori este dată de cealaltă diagonală a paralelogramului construit cu cei doi vectori drept laturi.

Pentru a obține diferența a doi vectori, îi trasăm cu origine comună și unim vîrfurile lor, orientînd săgeata spre vectorul descăzut. Ducînd în figura 1.8 vectorii de poziție $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$, se vede imediat, conform regulii de scădere *vectorială*, că vectorul deplasare $\overrightarrow{AB}$ este egal cu *diferența* vectorilor de poziție ai punctelor A, B, anume $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}$, adică *vectorul deplasare este egal cu variația vectorului de poziție.* Prin variația unui vector se înțelege (la fel ca pentru un scalar) *diferența* — bineînțeles *vectorială* — dintre valoarea *finală* și cea *inițială*.

Un vector este *constant* (în timp) dacă nici modulul, nici *direcția* și nici sensul său nu se schimbă în timp. Variația unui vector constant este nulă.

1.6.3. **Componentele unui vector.** Dacă proiectăm ortogonal un vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ pe o axă Ox, coborînd perpendiculare pe axă din originea A și din vîrful B al vectorului (fig. 1.14), obținem un segment $A'B'$, orientat în sensul pozitiv al axei Ox, dacă unghiul α format de vectorul $\vec{a}$ și axa Ox este ascuțit, și orientat în sensul negativ al axei, dacă unghiul este obtuz. Lungimea acestui segment prevăzută cu semnul plus, respectiv minus, se numește componenta a_x a vectorului $\vec{a}$ pe axa Ox: $a_x = (\pm)\ A'B'$.

Componenta unui vector $\vec{a}$ *pe o axă* Ox *este dată de formula:*

$$a_x = a \cos\alpha \text{ unde } a = |\vec{a}|,\ \alpha = \sphericalangle(\vec{a}, Ox). \quad (1.5)$$

Componenta pe axa Oy va fi $a_y = a \cos\beta = a \sin\alpha$ (o catetă este egală cu ipotenuza înmulțită cu cosinusul unghiului alăturat sau cu sinusul unghiului opus).

Componenta este nulă dacă vectorul este perpendicular pe axă ($\alpha = 90°$) și este $\pm a$, dacă vectorul este paralel cu axa (respectiv $\alpha = 0$ sau $180°$).

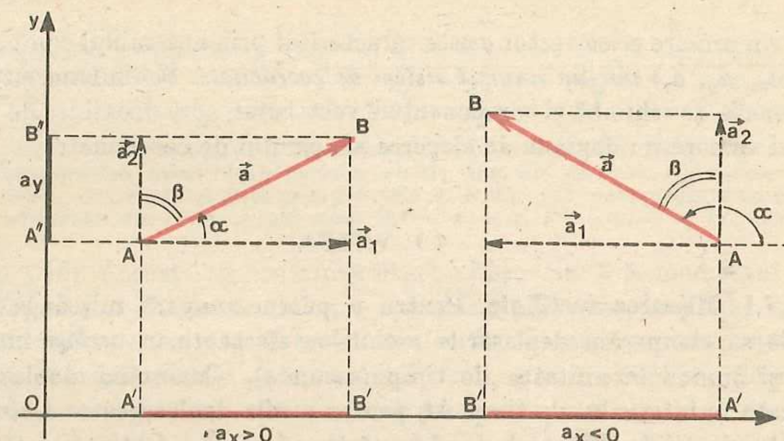


Fig. 1.14. Componentele unui vector pe axele de coordonate.

Dacă adunăm doi vectori $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și proiectăm vectorii pe o axă, obținem aceeași egalitate și pentru componentele lor: $a_x + b_x = c_x$ (fig. 1.15).

În general, orice sumă de vectori poate fi proiectată pe o axă oarecare și se obține o sumă corespunzătoare pentru componentele vectorilor:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n \Rightarrow \text{pr.}\ \vec{a} = \text{pr.}\ \vec{a}_1 + \text{pr.}\ \vec{a}_2 + \ldots + \text{pr.}\ \vec{a}_n,$$

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx}. \quad (1.6)$$

Proiecția rezultantei este egală cu suma proiecțiilor vectorilor componenți sau componenta pe o axă a rezultantei este egală cu suma componentelor pe acea axă a vectorilor componenți.

Desigur același rezultat se obține și în cazul *diferenței* a doi vectori. Astfel, componentele vectorului deplasare $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ pe axele de coordonate sînt deplasările pe axe: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ (fig. 1.8). Orice egalitate *vectorială* dă prin proiectare pe axele de coordonate egalități algebrice pentru componentele vectorilor.

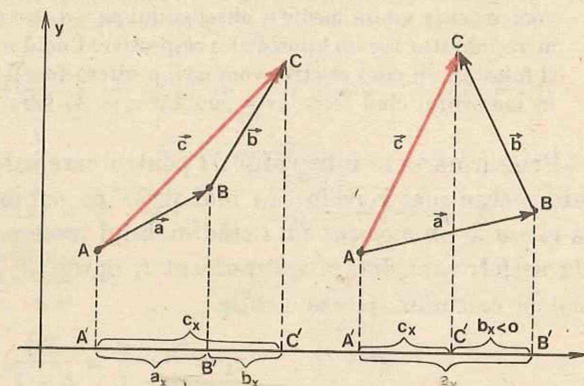


Fig. 1.15. Proiecția sumei a doi vectori este egală cu suma proiecțiilor celor doi vectori.

Prin urmare orice vector $\vec{a}$ este caracterizat prin ansamblul componentelor sale (a_x, a_y, a_z) *într-un anumit sistem de coordonate.* Schimbînd sistemul de coordonate, se schimbă şi componentele vectorului, spre deosebire de un scalar a cărui valoare nu depinde de alegerea sistemului de coordonate.

1.7. VITEZA

1.7.1. **Mişcarea rectilinie.** Pentru a putea compara mişcările între ele trebuie să comparăm deplasările mobilelor efectuate în *acelaşi* interval de timp şi anume în unitatea de timp (secunda). Cunoscînd deplasarea Δx efectuată în intervalul de timp Δt, pentru a afla deplasarea ce *revine* (corespunde) unităţii de timp trebuie să împărţim Δx la Δt. Obţinem astfel viteza medie a mobilului în intervalul de timp considerat:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{deplasare}}{\text{durată}}. \qquad (1.7)$$

Viteza (1.7) are acelaşi semn ca şi deplasarea, deoarece $\Delta t = t_2 - t_1$ este totdeauna pozitiv. Viteza este pozitivă dacă mobilul se mişcă în sensul pozitiv al axei ($\Delta x > 0$, $v_m > 0$) şi este negativă dacă mobilul se mişcă în sensul negativ al axei ($\Delta x < 0$, $v_m < 0$).

EXEMPLU

Un biciclist pleacă din Ploieşti ($x_1 = 60$ km) la ora $t_1 = 8{,}0$ h şi ajunge la Sinaia ($x_2 = 127$ km) la ora $t_2 = 13{,}0$ h. Viteza medie pe această distanţă $\Delta x = x_2 - x_1 = 67$ km sau pe intervalul de timp respectiv $\Delta t = t_2 - t_1 = 5{,}0$ h este $v_m = \Delta x/\Delta t = 67$ km/5,0 h $= 13{,}4$ km/h. Dar biciclistul n-a mers tot timpul cu această viteză. La început a mers probabil mai repede, apoi mai încet. Cînd a oprit să se odihnească viteza a fost zero; dacă a pierdut ceva şi s-a întors, viteza a fost negativă. Viteza medie calculată pentru *alte* intervale de timp sau pentru alte distanţe (de exemplu, Ploieşti-Cîmpina, Breaza-Comarnic) a fost *alta.*

Pentru a afla viteza la un moment dat t sau într-un anumit punct x al traiectoriei, de exemplu, viteza biciclistului la Băicoi, în dreptul bornei kilometrice $x = 80$ km, vom măsura viteza medie a biciclistului pe o distanţă *mică*, de exemplu, $\Delta x = 10$ m în vecinătatea bornei kilometrice respective. Luînd o distanţă şi *mai mică*, $\Delta x = 1$ m, şi folosind un ceas electric vom găsi o viteză foarte apropiată de viteza biciclistului în momentul cînd trece prin punctul $x = 80$ km.

Prin urmare, în intervalul Δt pentru care calculăm viteza medie, mobilul poate merge mai repede sau mai încet pe subintervale mai mici. Pentru a afla *viteza la un moment dat t* cînd mobilul trece prin punctul $P(x)$ putem proceda astfel: considerăm un moment t_1 apropiat de t cînd mobilul trece prin $A(x_1)$ şi calculăm viteza medie

$$v_1 = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{PA}{t_1 - t}$$

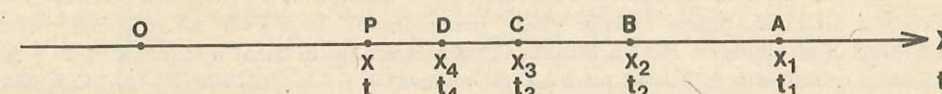


Fig. 1.16. Viteza momentană la momentul t cînd mobilul trece prin punctul $P(x)$ se obţine calculînd viteza medie pe intervale de timp din ce în ce mai scurte: $t_1 - t$, $t_2 - t$, $t_3 - t$ etc., cînd mobilul trece prin punctele A, B, C,... cît mai apropiate de P, deci pentru deplasări din ce în ce mai mici: $PA = x_1 - x$, $PB = x_2 - x$, $PC = x_3 - x$...

(fig. 1.16). Aceasta nu redă încă exact viteza din P la momentul t, deoarece pe segmentul PA în timpul $t_1 - t$ mobilul poate să-şi schimbe viteza. Dacă luăm însă momente t_2, t_3, t_4 etc. din ce în ce mai apropiate de momentul t (deci intervale Δt din ce în ce mai mici), cînd mobilul se află respectiv în punctele $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$ etc. din ce în ce mai apropiate de punctul P (deci deplasări Δx din ce în ce mai mici) şi calculăm vitezele medii corespunzătoare:

$$v_2 = \frac{x_2 - x}{t_2 - t}, \quad v_3 = \frac{x_3 - x}{t_3 - t}, \quad v_4 = \frac{x_4 - x}{t_4 - t} \text{ etc.}$$

obţinem valori care se apropie din ce în ce mai bine de valoarea vitezei la momentul t cînd mobilul trece prin P. Această viteză, care se obţine pînă la urmă prin procedeul indicat, se numeşte *viteză momentană* sau *instantanee*, sau pe scurt, viteză:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta x \text{ şi } \Delta t \text{ sînt foarte mici (descresc către zero).} \qquad (1.8)$$

Figura 1.17 ilustrează un experiment pentru situaţia din figura 1.16.

Viteza momentană diferă în general de la un moment la altul, cum este de exemplu în căderea liberă a unei pietre. La vehicule ea este indicată permanent de vitezometru.

Observăm că în (1.8) viteza momentană v se obţine ca un raport a două mărimi foarte mici Δx şi Δt care descresc simultan către zero (se spune: *tind* către zero şi se scrie: $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$). Deşi Δx şi Δt descresc *fiecare* către zero, *raportul* lor $\Delta x/\Delta t$ nu devine în general zero (viteza momentană nu este în general nulă). Vom conveni să notăm în cele ce urmează raportul a două variaţii foarte mici, care descresc către zero, înlocuind simbolul variaţiei Δ cu simbolul d, astfel de exemplu (1.8) se scrie:

$$v = \frac{dx}{dt}, \text{ adică } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0 \text{ (atunci şi } \Delta x \to 0). \qquad (1.9)$$

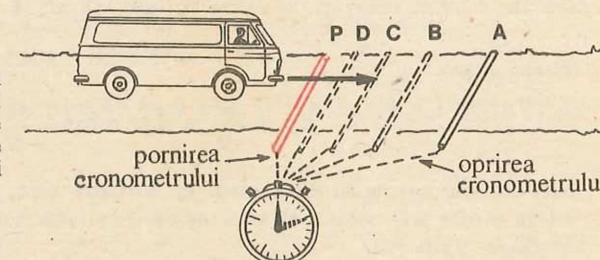


Fig. 1.17. Viteza momentană a unui camion, în momentul t cînd el trece prin punctul P, se poate determina calculînd viteza medie pe distanţe din ce în ce mai mici: PA, PB, PC, PD,... Cronometrul este pornit şi oprit cînd camionul calcă cablurile respective.

Conform procedeului descris, cunoscînd legea mişcării $x = f(t)$ (adică ecuaţia cinematică a mişcării), putem calcula viteza (momentană). În adevăr, să calculăm viteza mobilului la momentul t. Pentru aceasta să considerăm un moment apropiat $t' = t + \Delta t$. Calculăm coordonata mobilului pentru acest moment $t' : x' = f(t') = f(t + \Delta t)$. Calculăm deplasarea respectivă $\Delta x = x' - x = f(t + \Delta t) - f(t)$, o raportăm la intervalul de timp respectiv $\Delta t = t' - t$ şi facem apoi ca Δt să descrească către zero ($\Delta t \to 0$).

EXEMPLE

1. Fie legea mişcării $x = 2t^2 - 3$. Calculăm $x' = 2t'^2 - 3 = 2(t + \Delta t)^2 - 3$. Calculăm deplasarea $\Delta x = x' - x = 2(t + \Delta t)^2 - 3 - (2t^2 - 3) = 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2$ şi o raportăm la Δt:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4t\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 4t + 2\Delta t.$$

Făcînd acum pe Δt să descrească (să tindă) către zero ($\Delta t \to 0$), ultimul termen se anulează şi obţinem viteza (momentană):

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t.$$

2. Mai general, fie legea mişcării

$$x = At^2 + Bt + C, \qquad (1.10)$$

unde A, B, C sînt nişte constante (numere).
Calculăm coordonata x' pentru momentul $t' = t + \Delta t$:

$$x' = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C = At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t)^2 + Bt + B\Delta t + C,$$

de unde deplasarea $\Delta x = x' - x = 2At\Delta t + B\Delta t + A(\Delta t)^2$ şi viteza medie

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2At + B + A\Delta t.$$

Făcînd acum $\Delta t \to 0$, ultimul termen se anulează şi viteza devine:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2At + B. \qquad (1.11)$$

Prin urmare, dacă legea mişcării este dată de un polinom de gradul II în timp (funcţie pătratică de timp) (1.10), viteza va fi un polinom de gradul I în timp (funcţie liniară de timp) (1.11). Vom folosi acest rezultat mai tîrziu.

3. Fie legea mişcării

$$x = At + B, \text{ unde } A, B \text{ sînt constante.} \qquad (1.12)$$

Calculăm coordonata x' pentru $t' = t + \Delta t$ şi apoi deplasarea $\Delta x = x' - x$:

$$x' = At' + B = A(t + \Delta t) + B; \quad \Delta x = x' - x = A\Delta t.$$

Viteza medie

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = A = \text{const} = \frac{dx}{dt} = v. \qquad (1.13)$$

Nici nu este nevoie să descreştem pe Δt către zero, deoarece raportul este constant; viteza medie este constantă şi coincide cu viteza momentană — mişcarea se numeşte *rectilinie uniformă*.

1.7.2. **Mişcarea plană.** (Analog se studiază mişcarea în spaţiu.) Cunoscînd ecuaţiile mişcării $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, putem calcula, exact ca mai sus, vitezele medii şi momentane ale mobilului *în direcţiile axelor de coordonate*. Notăm vitezele respective cu un indice corespunzător axei:

$$v_{xm} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_{ym} = \frac{\Delta y}{\Delta t}. \qquad (1.14)$$

Dacă luăm intervale Δt din ce în ce mai mici, descrescînd (tinzînd) către zero, $\Delta t \to 0$ (atunci şi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$), obţinem vitezele momentane:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}. \qquad (1.15)$$

Pe de altă parte, deplasările Δx şi Δy sînt componentele pe axe ale *vectorului deplasare* $\Delta\vec{r}$ (fig. 1.8). Dacă împărţim vectorul deplasare la intervalul de timp (care este un scalar), obţinem *vectorul viteză* medie:

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.16)$$

Vectorul viteză medie are direcţia şi sensul vectorului deplasare, iar modulul egal cu modulul vectorului deplasare împărţit la intervalul de timp. Componentele vectorului viteză (1.16) pe axe sînt tocmai vitezele (1.14) ale proiecţiilor mobilului.

1.7.3. **Înmulţirea vectorilor cu scalari.** Dacă adunăm un vector $\vec{a}$ cu el însuşi obţinem un vector de aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, dar de modul dublu, ceea ce se scrie astfel: $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$. La fel pentru mai mulţi vectori:

$$\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{\text{de } n \text{ ori}} = n \cdot \vec{a}. \qquad (1.17)$$

Dacă punem acum:

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} \text{ şi } 0 \cdot \vec{a} = 0, \qquad (1.18)$$

obţinem prin generalizare regula înmulţirii vectorilor cu numere reale (cu scalari).

Prin *înmulţirea* unui vector $\vec{a}$ cu un număr real r se obţine un vector $r\vec{a} = \vec{a}r$ de modul $|r| \cdot |\vec{a}|$ şi de aceeaşi direcţie cu $\vec{a}$; sensul va fi *acelaşi* cu $\vec{a}$ dacă $r > 0$ şi *opus* lui $\vec{a}$ dacă $r < 0$ (fig. 1.18).

A împărţi un vector $\vec{a}$ la un număr real $p \neq 0$ înseamnă a-l înmulţi cu numărul $\frac{1}{p}$:

$$\frac{\vec{a}}{p} = \frac{1}{p} \cdot \vec{a}, \qquad (1.19)$$

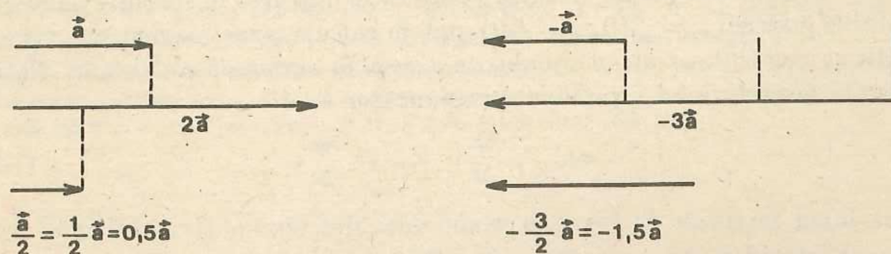


Fig. 1.18. Înmulţirea şi împărţirea vectorilor cu numere (cu scalari).

adică modulul vectorului dat se împarte la $|p|$, direcţia nu se schimbă, iar sensul rămîne acelaşi dacă $p > 0$ şi se inversează dacă $p < 0$. În cazul vitezei (1.16), Δt este totdeauna pozitiv!

Înmulţirea vectorilor cu scalari este *asociativă* şi *distributivă:*

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a},\quad (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a},\quad m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}. \qquad (1.20)$$

1.7.4. Vectorul viteză. În cazul mişcării *curbilinii* vectorul deplasare $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AA'}$ şi vectorul viteză medie $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, pentru un interval oarecare, au direcţia *secantei AA'* la traiectorie (fig. 1.19). Pentru a obţine viteza *momentană* într-un punct A al traiectoriei trebuie să luăm un interval $\Delta t = t' - t$ foarte mic, descrescînd către zero, atunci punctul A' se apropie de A, iar secanta AA' se roteşte în jurul punctului A (AA', AA'' etc.) pînă cînd devine *tangentă* la traiectorie (cînd punctele A, A' se confundă), deci vectorul viteză momentană

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \textit{adică}\ \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ \textit{cînd}\ \Delta t \to 0, \qquad (1.21)$$

este *tangent la traiectorie* în punctul considerat, adică are direcţia tangentei la traiectorie şi sensul dat de sensul mişcării mobilului în acel moment.

Proiectînd punctul material pe axele de coordonate, mişcarea sa curbilinie în spaţiu $\vec{r} = f(t)$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ se descompune în mişcări rectilinii după axele de coordonate, descrise de ecuaţiile cinematice ale mişcării: $x = f_1(t)$,

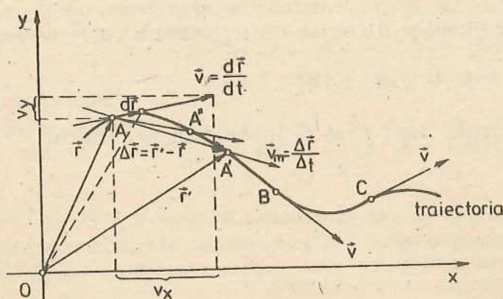


Fig. 1.19. Vectorul viteză medie $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ are direcţia *secantei* la traiectorie: $\overline{AA'}$. Făcînd pe $\Delta t = t' - t$ să descrească către zero, punctul A' se apropie de A (trecînd prin A'' etc.), secanta se roteşte în jurul lui A şi devine *tangentă la traiectorie*, deci vectorul viteză (momentană) $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ este tangent la traiectorie în fiecare moment şi are sensul dat de sensul mişcării.

$y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Vitezele mişcărilor componente sînt componentele vectorului viteză $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ al mobilului.

În cazul plan, aplicînd teorema lui Pitagora, avem $r^2 = x^2 + y^2$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

În cazul mişcării *rectilinii* vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ şi vectorul viteză $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ sînt situaţi chiar pe dreapta mişcării; în locul figurii 1.19 vom avea figura 1.20. Alegînd dreapta mişcării drept axă $O'x'$ şi proiectînd pe această axă vectorii $\Delta\vec{r}$, $\vec{v}_m$, $\vec{v}$, obţinem deplasarea $\Delta x'$, respectiv viteza $v_m = \Delta x'/\Delta t$, $v = dx'/dt$ aşa cum le-am definit în § 1.7.1. Observăm că pentru un vector *paralel* cu o axă, componenta (proiecţia) sa pe acea axă este egală cu plus sau minus modulul vectorului, după cum acesta este orientat în sensul pozitiv sau negativ al axei.

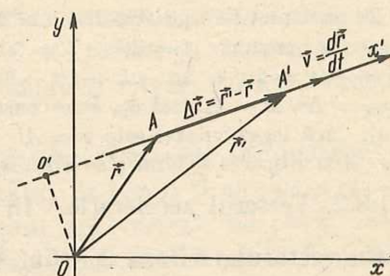


Fig. 1.20. În cazul mişcării rectilinii, vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ şi vectorul viteză $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, respectiv $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, sînt chiar pe dreapta mişcării $O'x'$. Proiectaţi pe această axă, ei dau $\Delta x'$, $v_m = \Delta x'/\Delta t$, $v = dx'/dt$.

Dacă vectorul viteză este constant, mişcarea este rectilinie uniformă (numită pe scurt, uniformă).

1.8. ACCELERAŢIA

În general vectorul viteză se schimbă în timpul mişcării, atît în *modul* — dacă mobilul merge mai repede sau mai încet pe traiectoria sa, cît şi ca *direcţie* — dacă traiectoria este *curbilinie*.

O aceeaşi variaţie a vectorului viteză se poate produce într-un timp mai lung sau mai scurt. Pentru a compara *neuniformitatea* diferitelor mişcări trebuie să calculăm variaţia de viteză în acelaşi interval standard de timp (unitatea de timp). De aceea, vom împărţi variaţia vitezei la intervalul de timp în care ea s-a produs, pentru a afla variaţia vitezei care *revine* (corespunde) *unităţii* de timp.

1.8.1. Acceleraţia în mişcarea rectilinie. În cazul mişcării *rectilinii*, *acceleraţia medie* (în intervalul de timp Δt) este

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{variaţia vitezei}}{\text{intervalul de timp}}. \qquad (1.22)$$

Ea poate fi pozitivă sau negativă după semnul lui Δv.

Acceleraţia medie caracterizează variaţia globală a vitezei în intervalul Δt, dar pe subintervale de timp mai scurte variaţia vitezei poate fi diferită. Pentru a caracteriza variaţia vitezei „la un moment dat“, vom calcula raportul (1.22) pentru intervale Δt din ce în ce mai mici, descrescînd către zero, şi vom obţine astfel acceleraţia *momentană* (sau instantanee):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}\ \text{cînd}\ \Delta t \to 0\ \text{adică}\ a = \frac{dv}{dt}. \qquad (1.23)$$

De exemplu, fie legea vitezei: $v = 2t - 5$. Calculăm viteza v' la momentul apropiat $t' = t + \Delta t$, anume $v' = 2t' - 5 = 2(t + \Delta t) - 5$. Calculăm acum variaţia vitezei $\Delta v = v' - v = 2(t + \Delta t) - 5 - (2t - 5) = 2\Delta t$ şi o raportăm la intervalul de timp Δt : $a_m = \Delta v/\Delta t = 2$, deci a_m este constantă şi coincide cu acceleraţia momentană. Mai general, dacă legea vitezei este $v = At + B$, unde A, B sînt constante, rezultă $a_m = a = A$ şi mişcarea se numeşte *rectilinie uniform variată.*

1.8.2. **Vectorul acceleraţie.** În cazul mişcării în *spaţiu*, dacă împărţim variaţia vectorului viteză $\Delta\vec{v}$ (fig. 1.21) la intervalul de timp Δt în care s-a produs, obţinem variaţia *medie* a vectorului viteză pe unitatea de timp, numită *vectorul acceleraţie medie:*

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{variaţia vectorului viteză}}{\text{intervalul de timp}}. \qquad (1.24)$$

El caracterizează global (în medie) variaţia *vectorului* viteză în intervalul de timp considerat. Dar în subintervale de timp mai mici variaţia poate fi diferită. La fel ca în cazul vitezei medii şi vitezei instantanee, luînd un interval de timp foarte mic (care descreşte către zero), obţinem *vectorul acceleraţie momentană* (sau instantanee), numit pe scurt vectorul acceleraţie.

Vectorul acceleraţie (momentană) este variaţia vectorului viteză calculată pentru un interval de timp foarte scurt în jurul momentului care ne interesează şi împărţită la acest interval (pentru a obţine variaţia care *revine unităţii* de timp):

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0, \text{ adică } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (1.25)$$

Acceleraţia medie $\vec{a}_m$ are direcţia şi sensul vectorului $\Delta\vec{v}$ (fig. 1.21). Cînd îl descreştem pe Δt către zero, vectorul $\vec{a}$ obţinut poate diferi, în general, puţin de $\vec{a}_m$ (aşa cum $\vec{v}_m$ are direcţia secantei, iar $\vec{v}$ are direcţia tangentei la traiectorie).

O b s e r v a ţ i e. Din figura 1.21 se vede că vectorul acceleraţie este totdeauna îndreptat spre „interiorul" traiectoriei, adică spre partea concavă

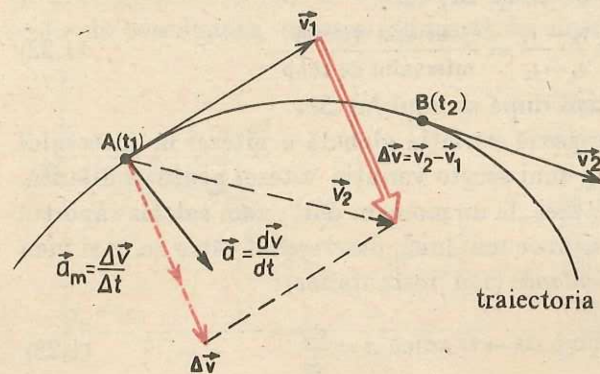


Fig. 1.21. Variaţia vectorului viteză $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, vectorul acceleraţie medie $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ şi acceleraţia momentană $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

a curbei, în sensul în care deviază vîrful vectorului viteză cînd mobilul se mişcă pe traiectorie. Vectorul acceleraţie este *paralel* cu vectorul vitezei *numai* în cazul mişcării *rectilinii*, cînd numai modulul vitezei variază, direcţia rămînînd neschimbată.

Subliniem încă o dată că acceleraţia caracterizează sau măsoară *variaţia vectorului* viteză (calculată pentru unitatea de timp) şi *nu viteza* raportată la timp. Dacă vectorul viteză este constant, nu variază, nu avem acceleraţie, indiferent de valoarea vitezei. Acceleraţia momentană poate fi nenulă, chiar dacă în acel moment viteza este nulă.

Analog ca pentru vectorul viteză, componenta vectorului acceleraţie pe o axă reprezintă acceleraţia mobilului în direcţia acelei axe şi este egală cu acceleraţia cu care se mişcă proiecţia mobilului pe acea axă, de exemplu:

$$a_{xm} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ şi } a_x = \frac{dv_x}{dt}\left(\text{adică } \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0\right). \qquad (1.26)$$

În cazul particular al mişcării *rectilinii*, variaţia $\Delta\vec{v}$, calculată pentru un interval Δt suficient de mic, deci şi vectorul acceleraţie, este în acelaşi sens cu vectorul viteză, dacă modulul vitezei creşte (mişcare accelerată) şi este în sens opus vectorului viteză, dacă modulul vitezei scade (mişcare încetinită) (fig. 1.22).

Acceleraţia (1.22—1.23) definită mai sus în cazul mişcării *rectilinii* reprezintă componenta vectorului acceleraţie $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ pe dreapta mişcării Ox şi este pozitivă dacă vectorul acceleraţie este orientat în sensul pozitiv al axei. Mişcarea este *accelerată*, dacă viteza v şi acceleraţia a au *acelaşi semn*, şi *încetinită*, dacă au *semne opuse.*

E X E M P L U

Un tren care se mişcă cu viteza de 90 km/h este la un moment dat frînat astfel încît în 20 secunde viteza sa scade la 18 km/h. Să se calculeze acceleraţia medie în această mişcare încetinită.

Rezolvare. Alegem sensul pozitiv pe traiectorie în sensul mişcării (al vitezei). Atunci $v_1 = +90$ km/h = 25 m/s, $v_2 = +18$ km/h = 5 m/s şi acceleraţia medie:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{5 - 25}{20}\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = -1\,\text{m/s}^2.$$

Semnul minus arată că vectorul acceleraţie este orientat în sensul opus sensului pozitiv ales şi cum viteza este pozitivă, semnul este în concordanţă cu caracterul încetinit al mişcării ($v > 0$, $a < 0$).

O b s e r v a ţ i i. **1.** În cazul mişcării rectilinii, semnul vitezei v şi semnul acceleraţiei a depind atît de sensul mişcării mobilului, cît şi *de sensul ales pozitiv pe axa mişcării.* Dacă schimbăm sensul pozitiv pe axa mişcării, atît v cît şi a îşi schimbă *amîndouă* semnul (de aceea caracterul accelerat sau încetinit nu depinde de sensul ales pozitiv pe axa mişcării).

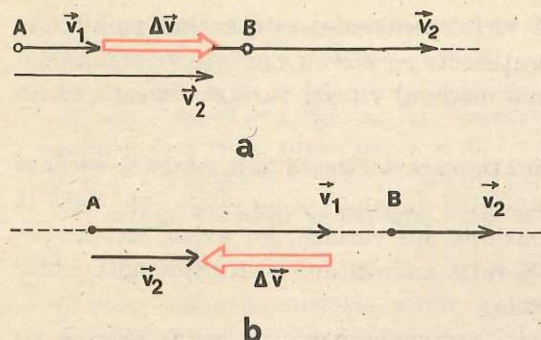


Fig. 1.22. În mişcarea rectilinie accelerată vectorii viteză şi acceleraţie au acelaşi sens (*a*), iar în mişcarea încetinită ei au sensuri opuse (*b*).

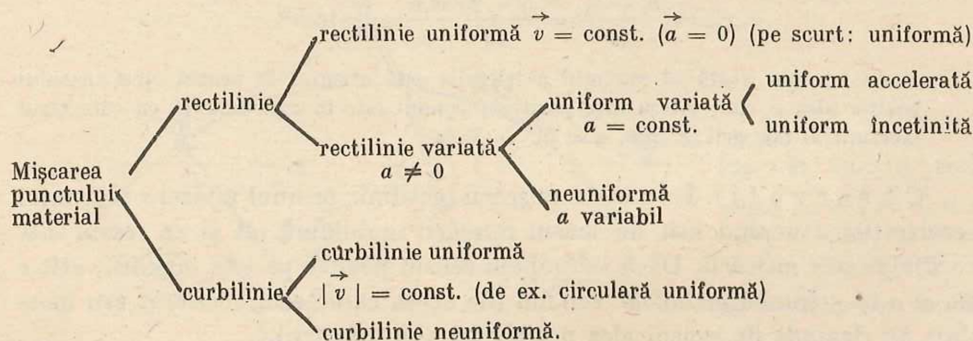
Aproape totdeauna se alege sensul pozitiv pe axa mişcării în sensul *vitezei* (al mişcării); *în acest caz* $a > 0$ înseamnă accelerare şi $a < 0$ înseamnă frînare.

2. În cazul mişcării *rectilinii*, acceleraţia medie, conform formulei (1.22) ne arată cu cît variază *în medie* în unitatea de timp (1 s) viteza corpului (pentru fiecare secundă din intervalul de timp Δt pentru care a fost calculată acea acceleraţie medie). În adevăr, din (1.22) avem $\Delta v = a_m \Delta t$ şi pentru $\Delta t = 1$ s, rezultă $\Delta v = a_m$. De exemplu, dacă acceleraţia unui tren este $a = 2{,}0$ m/s^2, înseamnă că viteza sa creşte în fiecare secundă cu 2,0 m/s. Caracterul accelerat sau încetinit depinde şi de semnul vitezei: dacă $v > 0$, trenul este accelerat, dacă $v < 0$, el este frînat. *Doar* semnul acceleraţiei *singur* nu ne spune încă despre caracterul accelerat sau încetinit al mişcării.

Iată încă un exemplu. Dacă vectorul acceleraţie al unui lift este îndreptat în sus, aceasta înseamnă *fie* pornire accelerată în sus *fie* frînare la coborîre. Dacă vectorul acceleraţie al liftului este îndreptat în jos, aceasta înseamnă *fie* pornire accelerată în jos *fie* frînare la urcare.

Exemple de acceleraţii. Acceleraţia gravitaţională de cădere liberă a corpurilor pe suprafaţa pămîntului $g = 9{,}8$ m/s^2, pe suprafaţa Lunii 1,62 m/s^2, pe suprafaţa Soarelui 271 m/s^2, pe Marte 3,77 m/s^2. Acceleraţia unui electron într-un atom de hidrogen $0{,}9 \cdot 10^{22}$ m/s^2. Un om suportă în mod acceptabil acceleraţii pînă la de cinci ori acceleraţia gravitaţională.

1.9. CLASIFICAREA MIŞCĂRILOR PUNCTULUI MATERIAL



1.10. RELATIVITATEA MIŞCĂRII MECANICE

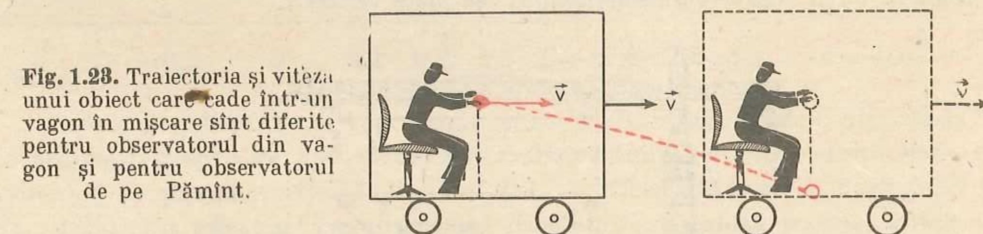
Am văzut că noţiunile de repaus şi de mişcare nu au sens decît *relativ* la un sistem de referinţă. Acelaşi lucru este valabil şi pentru traiectorie, adică nu numai viteza, ci şi forma traiectoriei depinde de sistemul de referinţă ales. Uneori în loc de sistem de referinţă se spune „observator", fiindcă totdeauna un observator studiază fenomenele faţă de un sistem de referinţă legat de el (sistem de coordonate, riglă şi ceasornic) şi reciproc, putem considera că în oricare sistem de referinţă se află un observator care studiază fenomenele.

Pentru exemplificare se consideră un observator aflat într-un vagon, ce se mişcă orizontal cu viteza constantă $\vec{v}$. Observatorul ţine în mînă un obiect. Pentru observatorul din tren obiectul este în repaus, traiectoria se reduce la un punct, deplasarea şi viteza sînt zero. Pentru observatorul de pe Pămînt, obiectul se deplasează orizontal cu viteza $\vec{v}$ împreună cu trenul şi traiectoria este o dreaptă orizontală.

Dacă observatorul din vagon scapă obiectul din mînă, acesta va cădea vertical în jos faţă de vagon, dar faţă de observatorul de pe Pămînt, obiectul va descrie o traiectorie curbilinie şi vectorul viteză va avea direcţie variabilă în timpul căderii (fig. 1.23).

Un alt exemplu îl constituie un obiect lăsat liber să cadă dintr-un avion (fig. 1.24). Pentru un observator terestru, traiectoria va fi curbilinie, analoagă

Fig. 1.23. Traiectoria şi viteza unui obiect care cade într-un vagon în mişcare sînt diferite pentru observatorul din vagon şi pentru observatorul de pe Pămînt.



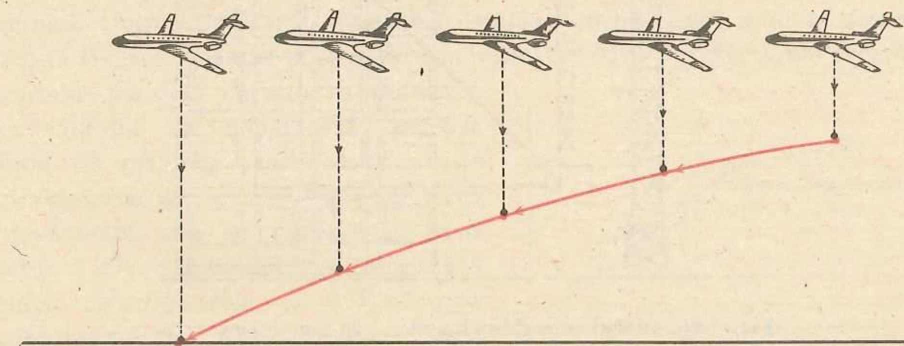


Fig. 1.24. Traiectoria şi viteza obiectului lansat din avion sînt diferite pentru avion şi pentru observatorul terestru.

celei din exemplul precedent, în timp ce pentru aviator traiectoria va fi practic (dacă neglijăm rezistența aerului) o linie verticală, tot timpul sub avion, dacă avionul continuă să zboare orizontal rectiliniu uniform.

Astfel de exemple ne demonstrează relativitatea *traiectoriei*, *deplasării și vitezei*.

1.11. COMPUNEREA MIȘCĂRILOR

Un corp poate participa simultan la două mișcări. Cum se compun ele pentru a da mișcarea rezultantă?

De exemplu, un om se plimbă într-un vagon, care la rîndul său se află în mișcare (sau un obiect cade într-un vagon în mișcare). Cunoscînd cele două mișcări, cum aflăm mișcarea rezultantă a omului (obiectului) față de pămînt? Sau, cunoaștem mișcarea unui satelit artificial față de Pămînt și mișcarea Pămîntului față de Soare, cum calculăm mișcarea satelitului față de Soare?

Alt exemplu: un bloc este ridicat în sus prin intermediul unui scripete și în același timp scripetele se deplasează orizontal de-a lungul brațului macaralei. Care va fi mișcarea (viteza) rezultantă (fig. 1.25)?

Care vor fi deplasarea și viteza rezultantă a bărcii față de mal, dacă se vîslește pe o direcție perpendiculară pe cursul apei unui rîu (fig. 1.26)?

Studiind exemplele de mai sus, constatăm că *deplasările și vitezele se compun după regula paralelogramului, ca orice vectori.*

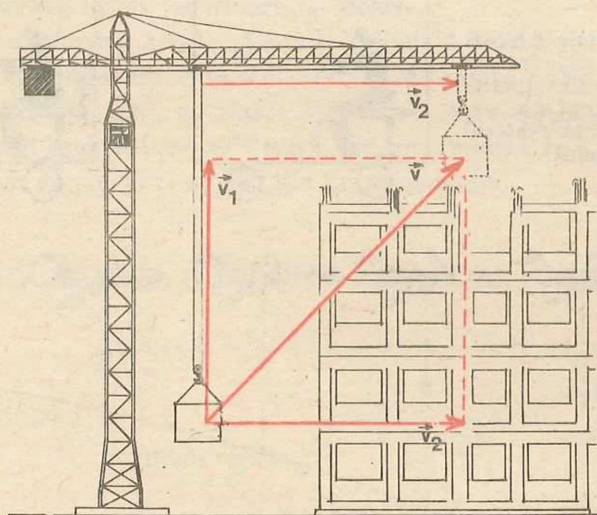


Fig. 1.25. Blocul este ridicat vertical în sus cu viteza $\vec{v}_1$ față de scripetele superior, care se deplasează orizontal cu viteza $\vec{v}_2$. Care este viteza rezultantă $\vec{v}$ a blocului față de pămînt?

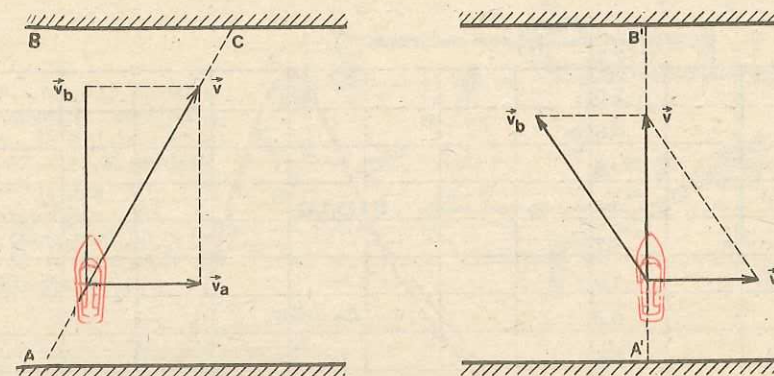


Fig. 1.26. Compunerea vitezelor. Viteza bărcii față de apă $\vec{v}_b$ se compune vectorial cu viteza apei $\vec{v}_a$ pentru a da viteza bărcii față de țărm: $\vec{v} = \vec{v}_b + \vec{v}_a$. Cum trebuie orientată viteza bărcii față de rîu pentru a ajunge *perpendicular* pe celălalt mal? Cînd este posibil aceasta?

1.12. REPREZENTAREA GRAFICĂ A LEGII MIȘCĂRII

Legea mișcării poate fi determinată experimental și reprezentată sub forma unui tabel:

t (în s)	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x (în m)	−0,2	0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,4	2,2	1,2	0	−0,6	0

Este util și sugestiv de reprezentat *grafic* legea mișcării într-o diagramă „coordonată-timp". Pe axa orizontală marcăm timpul t într-o scară convenabilă, iar pe axa verticală — coordonata x într-o altă scară convenabilă (fig. 1.27). Un punct P de pe această diagramă reprezintă poziția, adică coordonata x a mobilului la un moment t. Cînd mobilul se mișcă, poziția sa se schimbă în timp și punctul *reprezentativ* descrie o curbă. Dacă mobilul este în repaus (x fix sau constant în timp) curba reprezentativă devine o linie dreaptă orizontală, paralelă cu axa timpului Ot.

Dacă mobilul se depărtează sau se apropie de originea coordonatelor de pe traiectoria sa, curba reprezentativă se depărtează sau se apropie de axa orizontală Ot. Cînd mobilul trece prin originea coordonatelor ($x = 0$), curba reprezentativă taie axa timpului. Curba reprezentativă a legii de mișcare $x = f(t)$ nu are nici o legătură cu traiectoria.

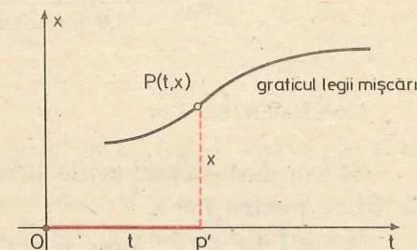


Fig. 1.27. Reprezentarea legii mișcării $x = f(t)$.

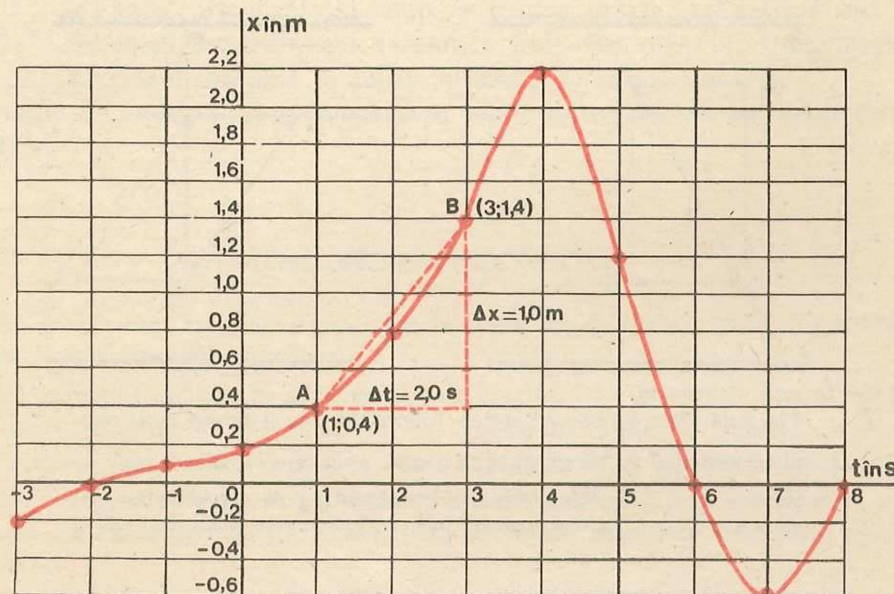


Fig. 1.28. Reprezentarea grafică a legii mişcării $x = f(t)$.

În exemplul din figura 1.28 la momentul (iniţial) $t = 0$ mobilul se afla la distanţa $x_0 = 0{,}20$ m de origine (coordonata iniţială). În „trecut" ($t < 0$) mobilul a trecut prin origine la momentul $t = -2{,}0$ s, venind din partea negativă a traiectoriei. La momentul $t = 4{,}0$ s mobilul se afla la distanţa maximă de origine: $x = 2{,}20$ m, după care a început să se apropie de origine foarte repede. La $t = 6{,}0$ s mobilul ajunge în origine şi trece de partea cealaltă „negativă" a traiectoriei, depărtîndu-se cel mai mult ($x = -0{,}60$ m) la $t = 7{,}0$ s, după care se întoarce din nou în origine la $t = 8{,}0$ s.

Viteza medie pe diferite intervale de timp se poate calcula din tabel sau din grafic. Astfel, viteza medie în intervalul (1,0; 3,0) s este:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1{,}40 - 0{,}40}{3{,}0 - 1{,}0}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}50 \text{ m/s}.$$

Viteza medie în intervalul (—3,0; 0,0) s este:

$$v_m = \frac{0{,}20 - (-0{,}20)}{0{,}0 - (-3{,}0)}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{0{,}40}{3{,}0}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}13 \text{ m/s}.$$

EXPERIMENTE

Se vor face experimente privind mişcarea rectilinie cu ajutorul Trusei le fizică pentru licee.

Montajul *mecanic* (fig. 1.29) conţine o bară (*66*) pe care rulează un cărucior (*27*) a cărui mişcare se studiază. Montajul *electric* (fig. 1.29, 1.30 şi 1.31) conţine un electromagnet (*20*) pentru reţinerea căruciorului, întrerupătoarele *ND* (*18*)

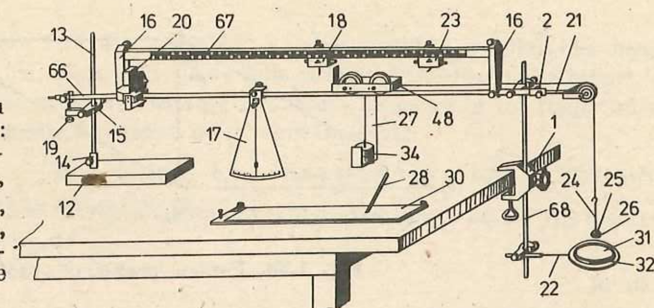


Fig. 1.29. Montaj pentru studiul mişcării rectilinii: *66* — bara de rulare, *27* — cărucior, *67* — riglă gradată, *18* — întrerupător *ND* (*1*), *23* — întrerupător *NI* (*2*), *20* — electromagnet, *28* — inscriptor, *30* — dispozitiv de înregistrare.

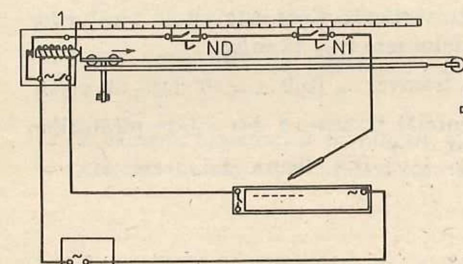


Fig. 1.30. Montajul electric.

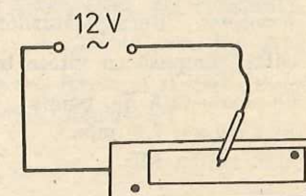


Fig. 1.31. Inscriptorul.

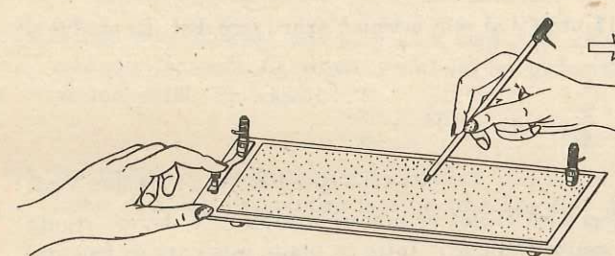


Fig. 1.32. Înregistrarea timpului.

(normal deschis) şi *NI* (*23*) (normal închis) şi un inscriptor (*28*). Înregistrarea timpului (fig. 1.32) se face printr-o metodă chimică folosind curentul alternativ.

Se fac experienţe de măsurare a vitezei *medii* pe diferite distanţe Δx. Se fixează pe rigla gradată (*67*) întrerupătoarele la această distanţă şi se măsoară timpul Δt, atunci $v_m = \Delta x/\Delta t$.

PROBLEME REZOLVATE

1. *a)* Putem vîsli pe un rîu astfel încît barca să rămînă pe loc faţă de mal? *b)* Se poate deplasa un om pe o scară rulantă astfel încît să fie în repaus faţă de pămînt?

Rezolvare. Dacă barca are faţă de apă exact viteza apei dar în *sens opus*, ea va rămîne pe loc faţă de mal. La fel, dacă omul are faţă de scară o viteză $\vec{v}'$ egală în modul, de aceeaşi direcţie, dar de *sens opus* cu viteza scării $\vec{v}$, adică $\vec{v}' = -\vec{v}$, el va rămîne pe loc faţă de pămînt.

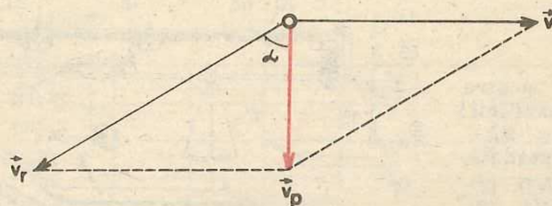


Fig. 1.33. Pentru problema rezolvată *2*.

2. Picăturile de ploaie, care cad vertical, formează pe geamurile unui tramvai în mişcare urme înclinate sub un unghi $\alpha = 60°$ faţă de verticală. Care este viteza picăturilor de ploaie (faţă de pămînt) dacă viteza tramvaiului este $v = 12$ m/s?

Rezolvare. Viteza picăturilor de ploaie faţă de tramvai $\vec{v}_r$ (sub $\alpha = 60°$ faţă de verticală), compusă cu viteza tramvaiului $\vec{v}$ (orizontală) trebuie să dea viteza picăturilor de ploaie faţă de pămînt (verticală): $\vec{v}_p = \vec{v}_r + \vec{v}$. Din figura 1.33 rezultă $v_p = v \operatorname{ctg} \alpha = 7,0$ m/s.

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. Un vector $\vec{a}$ are modulul $a = 12$ unităţi şi este orientat exact spre Est. Ce modul şi ce orientare au vectorii:

$$1,5\,\vec{a};\ \frac{\vec{a}}{4};\ -\vec{a};\ -0,5\vec{a};\ -\frac{\vec{a}}{3}?$$

R: 18; 3 spre Est; 12; 6; 4 spre Vest.

2. Cum se compun mai mulţi vectori dacă ei sînt pe aceeaşi dreaptă? Ce devine regula paralelogramului în cazul a doi vectori coliniari? Între ce limite este cuprins modulul sumei şi diferenţei a doi vectori $\vec{a}, \vec{b}$, dacă unghiul dintre ei variază?

R: algebric: $a + b \geqslant |\vec{a} \pm \vec{b}| \geqslant |a - b|$.

3. Pot fi combinaţi doi vectori de mărimi diferite astfel încît să dea rezultantă (sumă) nulă? Dar trei vectori?

R: nu; da în anumite condiţii (cînd reprezintă laturile unui triunghi).

4. Este operaţia de scădere vectorială, comutativă şi asociativă?

R: nu.

5. Cum sînt vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ dacă sînt valabile relaţiile: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ şi $a + b = c$? Dar în cazul $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$? Dar în cazul $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ şi $a^2 + b^2 = c^2$?

R: $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{b} = 0$; $\vec{a} \perp \vec{b}$.

6. În ce fel de mişcare distanţa parcursă coincide cu modulul vectorului deplasare?

R: în mişcarea rectilinie cînd viteza nu schimbă semnul.

7. Suma pe care o plătim la un taxi este proporţională cu: „distanţa parcursă" sau cu „modulul vectorului deplasare"?

R: cu distanţa parcursă.

8. Pentru mişcarea din figura 1.28 să se calculeze: *a)* viteza medie a mobilului în intervalele de timp: (1, 0; 4,0)s; (4,0; 6,0)s; (6,0; 7,0)s şi (6,0; 8,0)s. Pentru ce intervale de timp viteza medie este nulă? *b)* Distanţa străbătută de mobil în tot timpul mişcării. Care a fost viteza medie, în modul, pe întregul interval?

R: *a)* 0,60; −1,1; −0,60 şi 0,0 m/s; *b)* 5,8 m; 0,53 m/s.

9. Poate un mobil avea o viteză îndreptată spre Est şi în acelaşi timp o acceleraţie îndreptată spre Vest sau spre Nord?

R: da.

10. Poate avea un corp viteză nulă, la un moment dat, şi acceleraţie nenulă?

R: da.

11. Poate varia direcţia vitezei unui mobil dacă vectorul acceleraţiei este constant?

R: da (vezi fig. 2.16).

12. Un camion, mişcîndu-se curbiliniu, a descris o traiectorie sub forma unui sfert de cerc. Care este distanţa parcursă şi care este modulul vectorului deplasare?

R: $\pi R/2$; $R\sqrt{2}$.

13. Un vapor se deplasează $d_1 = 7,0$ km spre Est, apoi în continuare $d_2 = 3\sqrt{2}$ km spre N—V. Care este deplasarea rezultantă?

R: $d = 5,0$ km.

14. Viteza unui biciclist este $v_1 = 14,4$ km/h, iar viteza vîntului care îi suflă din faţă este $v_2 = 4,0$ m/s. Ce viteză a vîntului înregistrează biciclistul faţă de el? Dar dacă vîntul suflă din spate?

R: $v' = v_1 \pm v_2 = 8$, respectiv 0 m/s.

15. Un tractor cu şenile se mişcă cu viteza $v = 3,0$ m/s. Care este viteza şenilelor inferioare şi a celor superioare faţă de sol? Dar faţă de tractorist?

R: *a)* 0 şi $2v = 6,0$ m/s; *b)* $v = \pm 3,0$ m/s.

16. Un avion cu elice zboară rectiliniu uniform. Care va fi traiectoria unui vîrf al elicei în sistemul de referinţă legat de: *a)* elice; *b)* avion; *c)* pămînt?

R: *a)* punct; *b)* cerc; *c)* elice (ca filetul unui şurub).

17. Ecuaţiile mişcării a cinci puncte materiale sînt următoarele $x = 2t$; $x = 2 + 3t$; $x = -1 + 2t$; $x = 2 - t$; $x = 3$. Să se reprezinte grafic aceste ecuaţii pe *aceeaşi* diagramă Otx. Ce semnificaţie au punctele de intersecţie a graficului mişcării cu axele Ox, Ot?

R: coordonata iniţială (la $t = 0$); momentul trecerii prin origine (cînd $x = 0$).

2

PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

Mecanica clasică, elaborată în esenţă de ISAAC NEWTON (1643–1727) se bazează pe trei legi foarte generale, numite *principii*. Separat de aceste principii NEWTON a formulat principiul suprapunerii forţelor. Toate celelalte legi ale mecanicii newtoniene se deduc atunci din aceste principii ca teoreme.

2.1. PRINCIPIUL INERŢIEI (lex prima)

Un tren se mişcă rectiliniu uniform numai dacă este tras de locomotivă altfel ar merge încetinit şi pînă la urmă s-ar opri. La fel se întîmplă cu diferite alte vehicule.

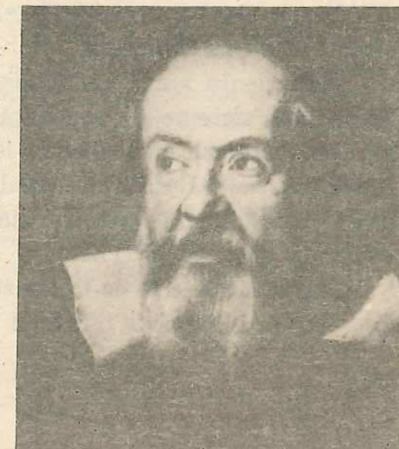
Să facem o experienţă simplă: să lăsăm o bilă de oţel pe un plan orizontal dur şi foarte bine lustruit (din sticlă), vom constata că ea se mişcă (rostogolindu-se) practic *rectiliniu uniform* mult timp. În schimb, o placă de lemn lansată pe un plan orizontal tot din lemn sau din cauciuc se opreşte aproape imediat. De ce? Fiindcă este puternic frînată de planul orizontal aspru (rugos) *prin frecare*, deci *prin acţiunea unui alt corp*.

Dacă am elimina acţiunile tuturor corpurilor înconjurătoare, adică am *izola* un corp aflat în mişcare, s-ar opri el oare?

Pe măsură ce diminuăm frecările şi alte acţiuni ale mediului, constatăm că mişcarea corpului se apropie tot mai mult de mişcarea rectilinie uniformă (de exemplu, mişcarea pe o linie cu pernă de aer). De aici prin idealizare sau abstractizare se ajunge la *principiul I al dinamicii* (principiul inerţiei):

un punct material îşi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă atît timp cît asupra sa nu acţionează alte corpuri care să-i schimbe această stare de mişcare.

Acest principiu a fost descoperit de GALILEO GALILEI în 1632 şi formulat de ISAAC NEWTON drept principiu I al dinamicii (lex prima) (1686).



GALILEO GALILEI (1564—1642) mare învăţat italian, astronom, fizician, mecanician, unul din fondatorii ştiinţelor exacte ale naturii. A descoperit legea inerţiei, legile căderii corpurilor, legile pendulului. Pentru prima dată în istoria astronomiei, cu ajutorul unei lunete confecţionate de el însuşi, a observat corpurile cereşti, descoperind munţii de pe Lună, patru sateliţi ai planetei Jupiter, fazele planetei Venus, structura stelară a Căii Lactee, petele pe Soare. În cartea sa „Dialog asupra celor două sisteme principale ale lumii, ptolemaic şi copernican" (1632) a dezvoltat strălucit învăţătura lui N. Copernic asupra sistemului solar, pentru care în 1633 a fost osîndit de un tribunal catolic.

Cum se explică atunci faptul că în practică mişcarea rectilinie uniformă a vehiculelor trebuie permanent întreţinută prin acţiunea unui agent exterior (motor)? În asemenea cazuri există totdeauna acţiuni opuse mişcării, de obicei frecările, care trebuie învinse sau compensate. În cazul cînd toate acţiunile asupra punctului material se compensează reciproc, acesta rămîne în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă.

2.1.1. **Inerţia şi masa.** Pentru a pune în mişcare un corp, pentru a-l opri sau pentru a-i curba traiectoria (a-i schimba vectorul viteză), trebuie să acţionăm asupra sa. La orice acţiune exterioară care caută să-i schimbe starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă, corpul se opune, reacţionează.

Se numeşte *inerţie* proprietatea unui corp de a-şi *menţine* starea de *repaus* sau de mişcare *rectilinie uniformă* în absenţa acţiunilor exterioare, respectiv de a se *opune* (reacţiona) la orice acţiune exterioară care caută să-i schimbe starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă în care se află.

Principiul I al dinamicii se numeşte şi *principiul inerţiei*, tocmai fiindcă proprietatea enunţată în el este o manifestare a inerţiei: un punct material izolat se află în repaus sau se mişcă rectiliniu uniform în *virtutea inerţiei*. O măsură a inerţiei este *masa*. În această calitate masa se numeşte *inerţială* (sau inertă).

2.2. SISTEME DE REFERINŢĂ INERŢIALE

Dacă un corp izolat se mişcă rectiliniu uniform faţă de stele (sau este în repaus faţă de stele), atunci faţă de Pămînt el se mişcă curbiliniu din cauza rotaţiei proprii diurne a Pămîntului, iar faţă de o navă cosmică, accelerată faţă de stele, el se mişcă accelerat. De aici rezultă evident că principiul inerţiei nu poate fi valabil în orice sistem de referinţă.

Sistemele de referinţă în care este valabil principiul inerţiei se numesc sisteme de referinţă *inerţiale*.

Vom arăta că toate sistemele de referință inerțiale se mișcă unele față de altele *rectiliniu uniform.*

Experiența arată că sistemele de referință legate de stele sau chiar de Soare sînt sisteme de referință inerțiale cu un mare grad de precizie. În schimb, sistemele de referință legate de Pămînt nu sînt riguros inerțiale din cauza rotației Pămîntului față de stele. În majoritatea covîrșitoare a nevoilor practicii, Pămîntul poate fi însă considerat sistem de referință inerțial cu un suficient grad de precizie.

Peste tot, în cele ce urmează, în rezolvarea problemelor, se înțelege că se folosește un sistem de referință *inerțial* (de obicei legat de Pămînt).

Principiile mecanicii newtoniene sînt valabile în sistemele de referință inerțiale (se va arăta la § 2.6).

2.2.1. **Transformarea Galilei.** Un același eveniment sau proces (de exemplu mișcarea unui punct material) poate fi studiat din două sisteme de referință diferite — vom spune, de către doi observatori diferiți. Un eveniment este caracterizat prin coordonatele sale spațiale x, y, z, care arată locul unde se produce evenimentul, și prin coordonata temporală t, care arată momentul la care se produce evenimentul. Fiecare observator măsoară coordonatele evenimentelor cu instrumentele *sale* (rigla și ceasornicul) și stabilește legile corespunzătoare.

Este important de stabilit legătura dintre coordonatele unui eveniment măsurate de diferiți observatori, adică *transformările de coordonate care dau trecerea de la un sistem de referință la altul.*

Astfel putem vedea care aspecte ale fenomenelor și legilor sînt *relative*, adică dependente de sistemul de referință, și care sînt *invariante*, adică independente de sistemul de referință (aceleași pentru toți observatorii).

Vom presupune că riglele și ceasornicele diferiților observatori sînt *construite și etalonate identic*, adică după aceeași „rețetă" (același procedeu tehnologic).

Fie două sisteme de referință S și S' cu axele paralele (axele Oz, $O'z'$ nu sînt desenate). Presupunem că S' se mișcă față de S cu viteza $\vec{u}$ *constantă*, astfel încît originile O, O' au coincis la momentul $t = t' = 0$, unde t este timpul măsurat în S, iar t' în S'.

Din punctul de vedere al observatorului S, aplicînd regula compunerii vectoriale, rezultă conform figurii 2.1:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u}t, \tag{2.1}$$

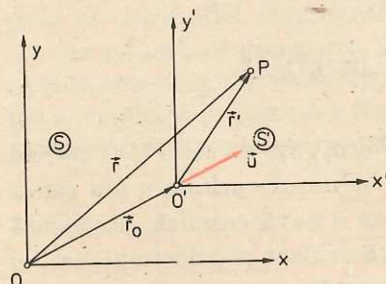


Fig. 2.1. Două sisteme de referință care se mișcă rectiliniu uniform unul față de altul. Transformările Galilei.

unde toți vectorii sînt măsurați cu instrumentele din S. Noi vrem însă să stabilim legătura dintre coordonatele $(\vec{r}, t)$ ale unui eveniment P, măsurate de observatorul S cu instrumentele *sale*, și coordonatele $(\vec{r}', t')$ ale aceluiași eveniment dar măsurate de observatorul S' *cu instrumentele* **sale.** Or, instrumentele (rigla și ceasornicul) din S' se află în mișcare față de S! Oare distanța $O'P$ măsurată de fiecare observator cu instrumentele *sale* va fi aceeași?

În mecanica clasică newtoniană se consideră că lungimile (distanțele) și duratele au caracter

invariant (sau *absolut*) adică rezultatele măsurătorilor de lungime și durată nu depind nici de mișcarea instrumentelor de măsură, nici de mișcarea obiectelor măsurate.

Această ipoteză este foarte bine verificată în domeniul vitezelor obișnuite (chiar pentru viteze cosmice), dar în domeniul vitezelor foarte mari, apropiate de viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (de exemplu, în cazul particulelor atomice), această ipoteză nu mai este exactă și trebuie aplicată mecanica relativistă.

Rămînînd în cadrul mecanicii clasice, putem considera că lungimile și duratele au caracter invariant. Astfel, timpul „curge" la fel în cele două sisteme de referință, și prin alegerea noastră a momentelor inițiale ($t = t' = 0$) rezultă permanent $t = t'$. În relația (2.1) putem considera $\vec{r}$ măsurat în S, iar $\vec{r}'$ *măsurat în* S', astfel încît obținem următoarele transformări Galilei:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t', \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t, \\ t' = t. \end{cases} \tag{2.2}$$

Din transformările Galilei rezultă imediat legea clasică de compunere a vitezelor. În adevăr, considerînd două poziții consecutive la două momente succesive, avem:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}'_1 + \vec{u}t_1 \\ t_1 = t'_1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \vec{r}_2 = \vec{r}'_2 + \vec{u}t'_2 \\ t_2 = t'_2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 + \vec{u}(t'_2 - t'_1) \\ \Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t'. \end{matrix}$$

Împărțind ultimele două relații membru la membru, găsim legea clasică de compunere a vitezelor:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t'} + \vec{u} = \vec{v}'_m + \vec{u}, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \tag{2.3}$$

unde $\vec{v}'$ este viteza relativă a mobilului față de S', $\vec{u}$ — viteza sistemului S' față de S și $\vec{v}$ — viteza rezultantă față de S.

Dacă acum considerăm vitezele la două momente consecutive:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{u}, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{u}, \quad \Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = \Delta\vec{v}'$$

și împărțind la intervalul de timp $\Delta t = \Delta t'$, obținem pentru accelerații

$$\vec{a}_m = \vec{a}'_m \text{ și } \vec{a} = \vec{a}', \tag{2.4}$$

adică *accelerația este aceeași în toate sistemele de referință în mișcare relativă rectilinie uniformă* ($\vec{u}$ = const), deci accelerația este *invariantă* față de aceste sisteme.

În particular, dacă accelerația este nulă într-un sistem S, adică particula este în repaus sau se mișcă rectiliniu uniform, atunci accelerația va fi nulă în oricare alt sistem S' mișcat *rectiliniu uniform* față de primul, adică particula va fi în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă în toate aceste sisteme de referință aflate în mișcare relativă rectilinie uniformă unele față de altele. Dacă principiul inerției este valabil într-unul din ele, deci acesta este un sistem de referință inerțial, atunci acest principiu va fi valabil în toate aceste sisteme de referință, care vor fi de asemenea inerțiale. Reciproc, dacă două sisteme de referință sînt inerțiale, atunci ele se mișcă unul față de altul rectiliniu uniform [altfel (2.4) n-ar fi valabilă, adică accelerația n-ar fi invariantă, deci mișcarea inerțială, cu $\vec{a} = 0$ într-unul din sisteme, ar apărea accelerată în celălalt].

2.3. PRINCIPIUL FUNDAMENTAL AL DINAMICII (lex secunda)

În procesele de *ciocnire* a două corpuri, de *frecare* între două corpuri solide sau între un solid și un fluid, de *atracție sau respingere* între corpuri magnetizate sau electrizate etc., corpurile acționează reciproc, unele asupra altora, adică *interacționează*. Ca efect al interacțiunii corpurile în general se deformează reciproc și se schimbă starea lor de mișcare, adică se schimbă vectorul viteză.

I. NEWTON a explicat căderea corpurilor ca efect al interacțiunii *gravitaționale* dintre corp și Pămînt. Acesta este un caz particular al *interacțiunii gravitaționale* sau *atracției universale* dintre oricare două corpuri. Un corp suspendat de un resort întinde resortul, iar lăsat liber cade accelerat datorită atracției *reciproce* dintre corp și Pămînt.

O măsură a interacțiunii este *vectorul forță*. Astfel, corpurile care interacționează exercită unul asupra celuilalt cîte o forță. Acțiunile diferitelor corpuri înconjurătoare asupra unui corp dat se manifestă prin forțe aplicate acestuia. Prin intermediul forțelor aplicate unui corp se transmite mișcarea mecanică.

Forțele se compun după regula paralelogramului ca orice vectori.

Exemple de forțe. Toate forțele din natură se reduc pînă la urmă la un număr mic de forțe *fundamentale*, corespunzător interacțiunilor fundamentale.

a) Una dintre acestea este *forța de atracție gravitațională*, care se exercită între oricare corpuri și depinde numai de masa lor și de distribuția substanței, indiferent de natura ei chimică.

Legea atracției universale a fost descoperită de Isaac Newton și aplicată la mișcarea corpurilor cerești (1687).

b) Un alt exemplu de forțe sînt *forțele electrice*. Ele sînt forțe de interacțiune între corpurile electrizate. Știm că prin frecare, de exemplu, corpurile se electrizează și între ele se exercită forțe de respingere sau de atracție.

Forțele elastice sînt forțe care apar în corpurile deformate*. Ele se reduc pînă la urmă la forțe *electrice*. În adevăr, prin deformarea unui solid, ionii, atomii sau moleculele sale constituente sînt dislocate din pozițiile lor de echilibru și se nasc forțe *electrice* care tind să restabilească echilibrul.

Forțele de frecare se reduc pînă la urmă tot la forțe *electrice*.

Orice forță aplicată unui corp îi modifică vectorul viteză, adică îi imprimă o *accelerație*. Din experiența de toate zilele știm că *aceeași* forță aplicată diferitelor corpuri produce variații diferite ale vitezei, fiindcă efectul depinde și de *inerția* corpului, adică de *masa* sa. Cu cît masa este mai mare cu atît variația de viteză, la aceeași forță aplicată, în același interval de timp, este mai mică. Ne putem da seama de acest fapt cînd tragem sau împingem cu *aceeași* forță același cărucior gol apoi încărcat.

---

* Acest tip de forță va fi studiat mai pe larg la § 3.6.



ISAAC NEWTON (1643—1727) a fost un mare fizician, astronom și matematician englez. În celebra sa carte „Principiile matematice ale filozofiei naturale" (1687) a fundamentat și dezvoltat mecanica clasică, formulînd cele trei principii ale mecanicii, precum și legea atracției universale. El a pus bazele mecanicii corpurilor cerești, explicînd mișcările planetelor în sistemul solar. Pentru rezolvarea problemelor mecanicii a elaborat mijloace și metode matematice noi și de o mare însemnătate, punînd bazele calculului diferențial și integral (în același timp și independent de Gottfried Wilhelm Leibniz).

Newton este cunoscut și pentru cercetările sale în domeniul opticii. El a descoperit și a studiat dispersia luminii (descompunerea luminii albe solare în culori). El este autorul unei teorii cu privire la natura luminii care a jucat un rol important în istoria științei (teoria corpusculară). A perfecționat aparatele optice, a construit pentru prima dată telescoape (cu oglindă) fără aberații cromatice.

Lucrările și concepțiile lui Newton au exercitat o puternică și îndelungată influență asupra întregii fizici; ele au dominat fizica aproape două secole. Prestigiul și succesele lucrărilor lui Newton au influențat imens întreaga istorie, nu numai a științei ci și a culturii în general.

Începînd cu primele decenii ale secolului XX, s-a stabilit că mecanica clasică newtoniană nu este valabilă în domeniul vitezelor foarte mari, comparabile cu viteza luminii în vid (c = 300 000 km/s), precum și în domeniul atomic.

De asemenea, constatăm ușor că aplicînd unui corp, aflat în mișcare *rectilinie*, o forță *în direcția mișcării sale* (a vitezei), nu modificăm caracterul *rectiliniu* al mișcării, adică nu abatem corpul de la traiectoria sa rectilinie, nu curbăm traiectoria, ci doar îl accelerăm sau frînăm pe această direcție (traiectorie). Deci *variația vitezei (accelerația) este în același sens cu forța.*

Dacă însă aplicăm o forță oblic sau perpendicular față de traiectorie (față de viteză), atunci abatem corpul de la mișcarea rectilinie, curbăm traiectoria, modificăm *direcția* vectorului viteză. Astfel se întîmplă de exemplu dacă lovim lateral o bilă de biliard aflată în mișcare sau dacă, în drumul unei bile de oțel care se rostogolește pe un plan orizontal de sticlă, punem lateral un magnet (fig. 2.2).

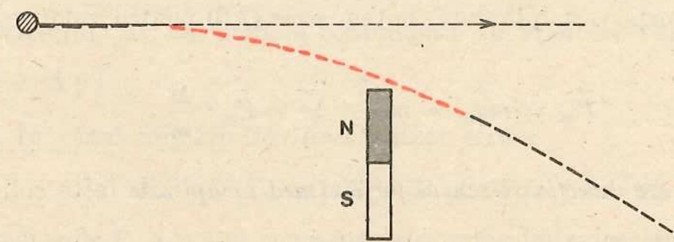


Fig. 2.2. Forța de atracție a magnetului curbează traiectoria unei bile de oțel care se rostogolește pe un plan orizontal.

Chiar din aceste experiențe și observații simple se poate bănui că *accelerația imprimată are direcția și sensul forței aplicate, fiind proporțională cu forța și invers proporțională cu masa corpului:* $\vec{a} = \text{const.}\ \frac{\vec{F}}{m}$.

Nenumărate experiențe, efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mișcare, cărora li s-au aplicat diferite forțe (gravitaționale, electrice, elastice etc.), au condus la următorul principiu:

vectorul forță este proporțional cu produsul dintre masă și vectorul accelerație

$$\vec{F} = \text{const.}\ m\vec{a}.$$

Acesta este conținutul principiului II al dinamicii, numit și *principiul fundamental* (lex secunda). Acest principiu a fost formulat de I. NEWTON (împreună cu celelalte principii ale mecanicii) în cartea sa „Principiile matematice ale filozofiei naturale" (1687).

Deoarece unitatea de măsură pentru masă (1 kg) este fixată, fiind chiar unitate fundamentală în SI (Sistem Internațional de unități), iar unitatea de accelerație a fost deja stabilită ca unitate derivată (1 m/s^2), vom alege unitatea de forță astfel încît constanta de proporționalitate din legea de mai sus să fie 1. Atunci ecuația principiului II devine:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{2.5}$$

iar unitatea de măsură pentru forță va fi egală cu unitatea de masă ori unitatea de accelerație:

$$[F] = [m] \cdot [a] = 1\ \text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 1\ \text{N}. \tag{2.6}$$

Această unitate în SI se numește newton (N).

Newtonul este egal cu mărimea acelei forțe care aplicată unui corp cu masa de 1 kg îi imprimă o accelerație de 1 m/s².

Înțelegînd prin forță medie pe un interval de timp Δt, o forță constantă care produce aceeași accelerație medie sau aceeași variație de viteză pe intervalul Δt ca și forța variabilă dată, putem scrie (2.6) pentru valori medii:

$$\vec{F}_m = m\vec{a}_m = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t};\ \Delta\vec{v} = \vec{F}_m \cdot \frac{\Delta t}{m}, \tag{2.7}$$

variația vitezei are direcția și sensul forței (medii) aplicate (este coliniară cu forța).

Dacă forța aplicată este coliniară cu viteza, variația de viteză va fi de asemenea coliniară cu viteza, deci viteza își păstrează direcția, adică mișcarea va fi rectilinie pe direcția comună a forței și vitezei (fig. 2.3, *a*).

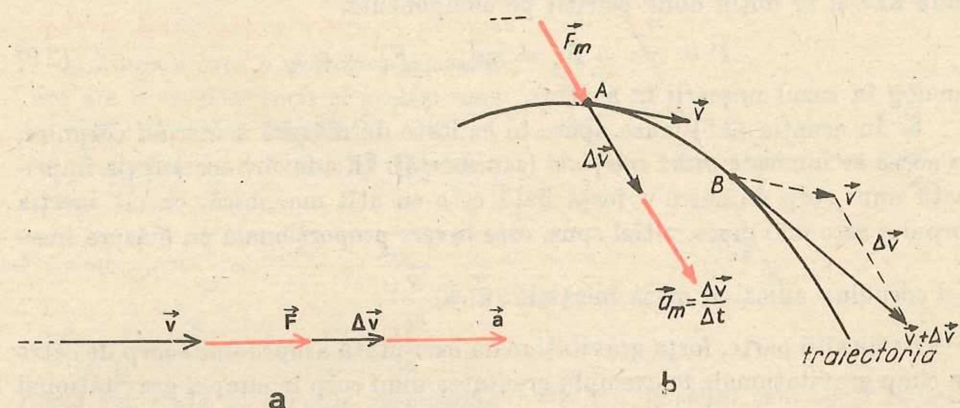


Fig. 2.3. Variația vectorului viteză are direcția și sensul forței aplicate. (*a*) Forța fiind paralelă cu viteza, creșterea de viteză și accelerația sînt pe aceeași direcție și mișcarea este rectilinie. (*b*) Forța fiind oblică pe viteză, variația de viteză și accelerația au direcția și sensul forței aplicate, deci mișcarea va fi curbilinie.

Dacă însă forța aplicată este oblică față de viteză, variația vitezei va fi în direcția și în sensul forței, deci traiectoria se va curba înspre regiunea spre care este îndreptată forța (fig. 2.3, *b*).

Experimente de verificare a legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$ în două cazuri mai simple, vor fi prezentate la paragrafele următoare: forță constantă pe direcția mișcării — mișcare rectilinie uniform variată, § 3.2, și forță constantă în modul, perpendiculară pe direcția mișcării — mișcare circulară uniformă, § 3.5.

2.3.1. Observații în legătură cu principiul II. 1. Ecuația principiului II este o ecuație *vectorială*. Variația unui vector de exemplu, $\Delta\vec{v}$, nu trebuie confundată cu variația modulului Δv (unde $v = |\vec{v}|$). De exemplu, într-o mișcare *curbilinie* uniformă avem $|\vec{v}| = v = \text{const}$, deci $\Delta v = 0$, dar variază *direcția* vectorului viteză, deci $\Delta\vec{v} \neq 0$ și $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \neq 0$. De asemenea, variația modulului, Δv, nu trebuie confundată cu modulul variației vectorului $|\Delta\vec{v}| \neq \Delta|\vec{v}|$.

2. În cazul mișcării *rectilinii* putem scrie:

$$F_m = ma_m = m\Delta v\ /\ \Delta t,\ F = m \cdot \mathrm{d}v\ /\ \mathrm{d}t, \tag{2.8}$$

unde mărimile F, v, a sînt componentele vectorilor respectivi pe axa mișcării Ox, pozitive dacă vectorii respectivi sînt orientați în sensul pozitiv ales pe axă și negative dacă vectorii respectivi sînt orientați în sensul opus.

În cazul mişcării *plane* ecuaţia vectorială $\vec{F} = m\vec{a}$ se proiectează pe cele două axe şi se obţin două ecuaţii pe componente.

$$\vec{F} = m\vec{a} \to F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y \qquad (2.9)$$

(analog în cazul mişcării în spaţiu).

3. În ecuaţia (2.5) masa apare în calitate de măsură a *inerţiei* corpului, de aceea se numeşte *masă inerţială* (sau inertă). În adevăr, acceleraţia imprimată unui corp de către o forţă dată este cu atît mai mică, cu cît inerţia corpului este mai mare, altfel spus, este invers proporţională cu măsura inerţiei corpului, adică cu masa inerţială: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Pe de altă parte, forţa gravitaţională exercitată asupra unui corp de către un cîmp gravitaţional, de exemplu greutatea unui corp în cîmpul gravitaţional terestru, este proporţională tot cu masa corpului:

$$\vec{G} = m\vec{g}. \qquad (2.10)$$

Se va arăta mai tîrziu că cele două mase coincid (§ 3.8.1).

Acceleraţia gravitaţională $\vec{g}$ este orientată spre centrul Pămîntului, la fel ca şi greutatea corpurilor şi are valoarea $g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$ (depinde de altitudine şi latitudine).

Greutatea etalonului masă de 1 kg în cîmpul gravitaţional normal (standard) dat de acceleraţia gravitaţională $g_n = 9{,}80665\ \text{m/s}^2$ este:

$$G = mg = 1\ \text{kg} \cdot 9{,}80665\ \text{m/s}^2 = 9{,}80665\ \text{N} \approx 9{,}8\ \text{N}.$$

Acceleraţia gravitaţională la nivelul mării şi la paralela de 45° este $g_0 = 9{,}80616\ \text{m/s}^2$.

4. Ecuaţia $\vec{F} = m\vec{a}$ nu ne spune nimic despre *natura* forţei: ea poate fi de natură gravitaţională, electrică sau în particular forţă elastică, forţă de frecare etc. În ecuaţia $\vec{F} = m\vec{a}$ forţa apare sub formă abstractă ca un model *mecanic* al oricărei interacţiuni a corpurilor, independent de natura fizică a acestei interacţiuni. În modul acesta, relaţia $\vec{F} = m\vec{a}$, pe lîngă caracterul de lege a naturii, poartă şi caracterul de *definiţie dinamică a forţei*. De aceea pentru determinarea mişcării unui sistem: oscilator elastic, sistem solar, atom etc. trebuie cunoscută şi *legea forţei*, de exemplu legea lui Hooke, legea atracţiei gravitaţionale (NEWTON), legea interacţiunii electrice (COULOMB) etc.

2.3.2. Impulsul. Să scriem desfăşurat relaţia (2.7):

$$\vec{F}_m = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(m\vec{v})_2 - (m\vec{v})_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2.11)$$

Se vede că aici apare produsul $m\vec{v}$ dintre masă şi viteză. Acest produs reprezintă o nouă mărime fizică importantă numită impuls.

Impulsul punctului material este produsul dintre masa şi viteza sa, $\vec{p} = m\vec{v}$.

Impulsul este o mărime *vectorială* care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu vectorul viteză (fig. 2.4).

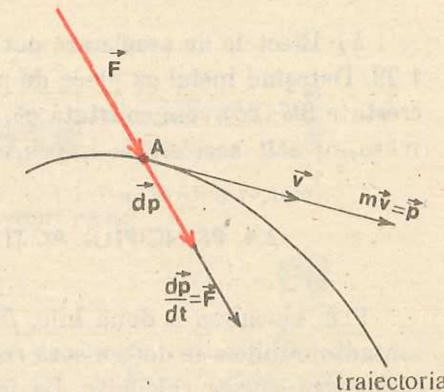


Fig. 2.4. Impulsul unui punct material, $\vec{p} = m\vec{v}$, are direcţia şi sensul vitezei $\vec{v}$. Variaţia impulsului are direcţia şi sensul forţei aplicate.

Revenind la ecuaţia (2.11), putem scrie:

$$\vec{F}_m = m\vec{a}_m = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (2.12)$$

Forţa este egală cu variaţia impulsului raportată la intervalul de timp, adică variaţia impulsului care *revine* unităţii de timp.

Aceasta este o altă formulare (cea mai generală) a principiului II al dinamicii (de altfel aşa l-a formulat chiar Newton).

Unitatea de măsură pentru impuls rezultă din definiţia sa:

$$[p] = [m][v] = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \text{m/s} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s} = 1\ \text{N} \cdot 1\ \text{s} = \text{N} \cdot \text{s}, \qquad (2.13)$$

Această unitate este deci egală cu impulsul unui punct material care are masa de 1 kg şi se mişcă cu viteza de 1 m/s.

EXPERIMENT

Forţele produc două feluri de efecte: efecte de *deformare* a corpurilor (numite efecte statice) şi efecte de *accelerare* a corpurilor (numite efecte dinamice).

a) Efectele de deformare sînt folosite pentru a măsura forţele. Există corpuri, numite *elastice*, la care deformaţiile (nu prea mari) dispar odată cu îndepărtarea forţelor care le-au produs, de exemplu tot felul de *resorturi*.

Dinamometrele sînt resorturi elastice prevăzute cu o riglă pentru măsurarea alungirilor, deci a forţelor aplicate, rigla fiind gradată direct în unităţi de forţă (fig. 2.5). Cu ajutorul dinamometrelor putem verifica legea de compunere *vectorială* a forţelor.

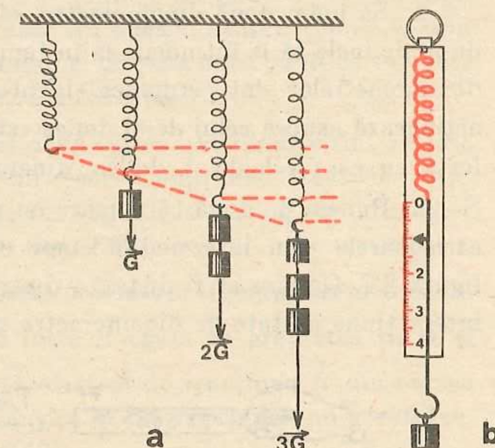


Fig. 2.5. (*a*) Alungirea unui resort elastic este proporţională cu forţa de întindere. (*b*) Schema unui dinamometru.

b) Efectele de accelerare pot fi puse în evidență cu montajul din figura 1.29. Detașînd inelul cu placa de prindere (22, 32) și folosind diferite greutăți crestate (25, 26) vom constata că, cu cît forța de greutate a acestora este mai mare, cu atît accelerația imprimată căruciorului este mai mare.

2.4. PRINCIPIUL ACȚIUNILOR RECIPROCE (lex tertia)

Prin ciocnirea a două bile, *fiecare* își schimbă viteza, fiindcă în timpul contactului bilele se deformează *reciproc* și se nasc forțe elastice cu care o bilă acționează asupra celeilalte. La fel, la ciocnirea a două vagoane, resorturile tampoanelor de la *fiecare* vagon se comprimă, *fiecare* vagon acționînd asupra celuilalt cu o forță.

În procesul interacțiunii a două corpuri, *fiecare* corp exercită o forță asupra celuilalt, adică apar totdeauna *simultan două forțe*, numite *acțiune* și *reacțiune*. Care din aceste două forțe se numește acțiune și care reacțiune, depinde de care corp se consideră primul și care al doilea. Primul corp acționează asupra celui de-al doilea cu o forță care se va numi acțiune, iar corpul al doilea acționează (vom spune acum, reacționează) asupra primului cu o forță numită reacțiune. Cele două forțe acționează *simultan* (în concepția clasică newtoniană a acțiunii instantanee la distanță).

Oriunde constatăm o forță acționînd asupra unui corp, eá este expresia acțiunii unui alt corp din mediul înconjurător, este o latură a *interacțiunii* dintre cele două corpuri. O forță unică, izolată, este o imposibilitate.

EXPERIMENTE

1. Să luăm două dinamometre, să le cuplăm prin cîrligele lor și apucîndu-le de inele să le întindem ca în figura 2.6. Oricît le-am întinde, indicațiile dinamometrelor sînt permanent identice, forța cu care primul dinamometru acționează asupra celui de-al doilea este egală ca mărime și opusă ca sens cu forța cu care cel de-al doilea dinamometru acționează asupra primului.

2. Punem pe două cărucioare un magnet și o bucată de fier și prindem cărucioarele prin intermediul unor dinamometre de obiecte fixe, ca în figura 2.7. Oricare ar fi distanța dintre magnet și bucata de fier, forțele de interacțiune arătate de dinamometre sînt egale în modul și de sensuri opuse.

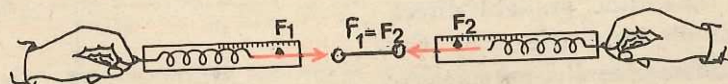


Fig. 2.6. Fiecare dinamometru acționează asupra celuilalt cu o forță egală în modul și de sens opus.

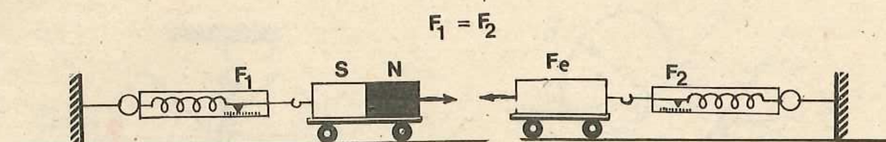


Fig. 2.7. Interacțiunea dintre un magnet și o bucată de fier: se atrag reciproc, cu forțe egale în modul și de sensuri opuse.

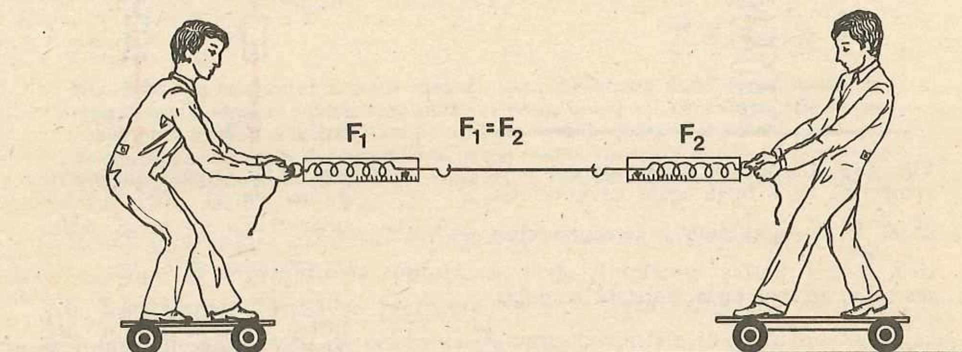


Fig. 2.8. Oricare din elevi ar trage de sfoară, ambele cărucioare se apropie și se întîlnesc mereu în același loc.

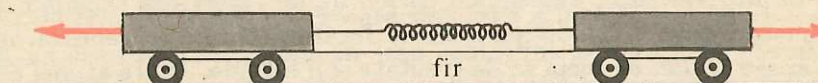


Fig. 2.9. Două cărucioare identice, așezate pe un plan orizontal și cuplate printr-un resort comprimat sînt supuse reciproc unor forțe egale în modul și de sensuri opuse.

3. Pe două cărucioare stau doi elevi și trag de o sfoară (fig. 2.8). Indiferent care dintre ei trage activ „scurtînd“ sfoara, ambele cărucioare se vor întîlni de fiecare dată în același loc. Fiecare elev acționează asupra celuilalt, prin intermediul sforii, cu o forță egală în modul și de sens opus (ceea ce se poate constata cu ajutorul unor dinamometre intercalate).

4. Într-o altă variantă a experienței două cărucioare *identice* sînt așezate pe o sticlă orizontală și cuplate printr-un resort comprimat, legat cu un fir. Dacă ardem firul, cele două cărucioare se vor depărta la fel, sub acțiunea unor forțe egale în modul și de sensuri opuse (fig. 2.9).

5. Dacă punem un corp pe o platformă orizontală (ușoară) așezată pe un resort, corpul apasă pe *platformă* cu o forță $\vec{F}$ egală cu greutatea sa $\vec{G}$ și comprimă resortul. Apare atunci o forță elastică de reacțiune $\vec{N}$ din partea resortului, aplicată *corpului*, egală în modul și de sens opus cu greutatea, astfel încît corpul va fi în repaus (fig. 2.10).

Același lucru se întîmplă cu orice corp așezat pe orice suprafață orizontală, numai că la materialele dure deformarea nu se observă cu ochiul liber.

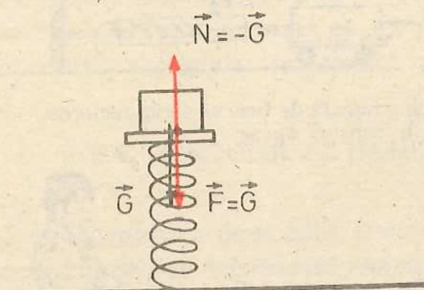


Fig. 2.10. Corpul așezat pe un resort îl comprimă cu o forță egală cu greutatea sa $\vec{G}$. Se naște automat o reacțiune elastică $\vec{N}$ din partea resortului, egală în modul și de sens opus, aplicată corpului.

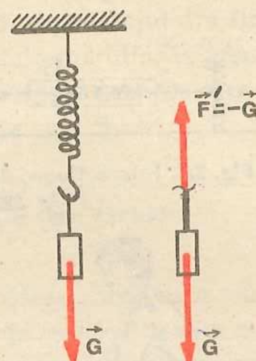


Fig. 2.11. Corpul suspendat de un resort (fir) întinde resortul cu o forță egală cu greutatea sa $\vec{G}$. Se naște atunci o forță elastică $\vec{F'}$ din partea resortului, aplicată corpului, egală în modul și de sens opus tracțiunii (greutății) $\vec{G}$.

6. În altă variantă, suspendăm corpul de un resort (de exemplu de un dinamometru) (fig. 2.11). În punctul de legătură corpul acționează asupra *resortului* sau *firului* cu forța sa de greutate și îl întinde. Apare atunci o forță elastică din partea resortului sau a firului, aplicată corpului, egală în modul și de sens opus cu greutatea corpului (acesta fiind în repaus, în echilibru).

Nenumărate experiențe și măsurători dovedesc valabilitatea *principiului acțiunilor reciproce* sau *principiului acțiunii și reacțiunii:*

fiecărei acțiuni i se opune totdeauna o reacțiune egală în modul și de sens opus, sau altfel, *acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale ca mărime și dirijate în sensuri opuse.*

Cele două forțe, acțiunea și reacțiunea, sînt aplicate unor corpuri *diferite* și acționează pe *aceeași linie*, linia care unește cele două corpuri. Dacă cele două forțe ar acționa asupra aceluiași corp, acesta n-ar putea fi niciodată accelerat, deoarece cele două forțe ar da totdeauna rezultantă nulă.

Principiul acțiunii și reacțiunii poate fi exprimat și astfel:

dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță, numită acțiune, cel de-al doilea corp acționează asupra primului cu o forță egală în modul și opusă ca sens, numită reacțiune.

2.4.1. **Exemple și aplicații ale principiului III.** 1. La *contactul* oricăror două corpuri apar totdeauna *două* forțe, egale în modul și de sensuri opuse, acțiunea unui corp asupra celuilalt și reacțiunea celui de-al doilea asupra primului (fig. 2.12).

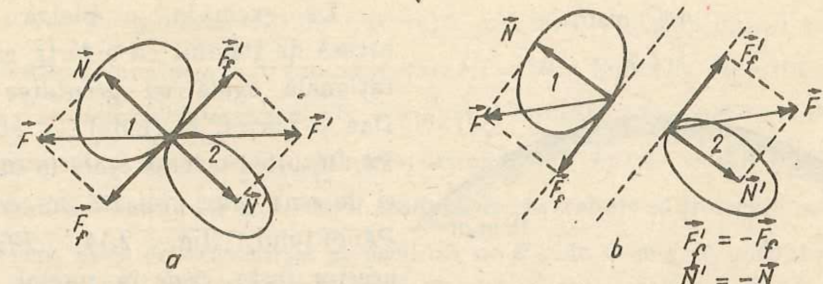


Fig. 2.12. La contactul a două corpuri apar totdeauna două forțe, egale în modul și de sensuri opuse, acțiunea și reacțiunea, cu care corpurile acționează unul asupra celuilalt. Componentele normale (perpendiculare) pe planul de contact se datoresc deformării reciproce a corpurilor, iar cele tangențiale (de frecare), conținute în planul de contact, se datoresc frecării dintre corpuri.

Aceste forțe sînt *rezultatul deformării reciproce a corpurilor și a frecării dintre corpuri la suprafața de contact.*

Anume, prin deformarea reciprocă se nasc *forțe (elastice) normale* (perpendiculare) pe suprafața de contact. Desigur corpurile se deformează diferit, deși forțele normale sînt *egale în modul.* Prin frecare, între corpuri se nasc *forțe tangențiale*, de frecare, conținute în planul de contact. Avem: $\vec{N'} = -\vec{N}$, $\vec{F'_f} = -\vec{F_f}$. (Uneori forțele de frecare sînt mici și pot fi neglijate.)

2. În orice *secțiune* a unui fir (sau cablu) întins de o forță (de exemplu de greutatea unui corp atîrnat) sau în orice *secțiune* a unei bare, întinse sau comprimate, acționează *două* forțe egale în modul și de sensuri opuse, acțiunea și reacțiunea, cu care o parte a firului (barei) acționează asupra celeilalte părți (fig. 2.13). Oricare din aceste două forțe se numește *tensiune* elastică din fir (sau bară). Tensiunea în orice punct al firului se poate măsura cu un dinamometru inserat pe fir în punctul respectiv. Dacă greutatea proprie a firului este neglijabilă, tensiunea din fir în orice secțiune a sa va fi aceeași (egală cu greutatea corpului atîrnat, de exemplu).

3. Principiul acțiunii și reacțiunii se aplică nu numai în cazul unui contact nemijlocit între două corpuri, ci și în cazul cînd corpurile interacționează prin cîmpul gravitațional sau electrostatic.

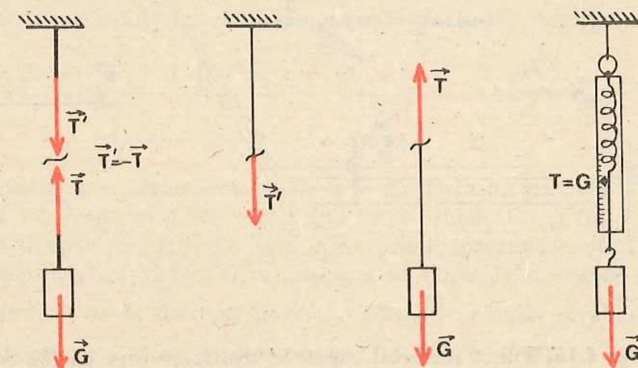


Fig. 2.13. Tensiunea (elastică) dintr-un fir întins poate fi măsurată cu un dinamometru inserat în fir în secțiunea dorită.

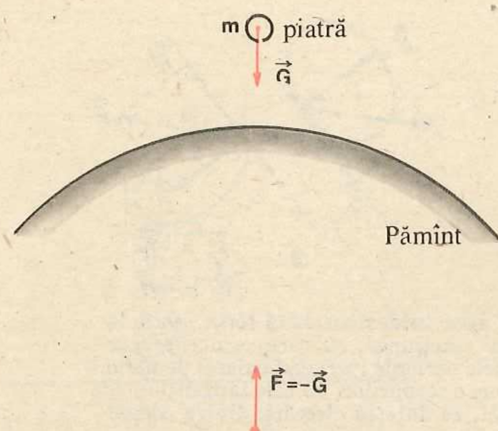


Fig. 2.14. Piatra este atrasă de Pămînt cu o forță exact egală în modul și de sens opus cu forța cu care Pămîntul este atras de piatră. Efectele acestor forțe sînt însă cu totul diferite din cauza maselor total diferite.

De exemplu, o piatră este atrasă de Pămînt cu o forță gravitațională egală cu greutatea sa. Dar și piatra, la rîndul ei, atrage Pămîntul cu o forță *egală* în modul și de sens *opus*, aplicată în centrul Pămîntului (fig. 2.14). *Efectele* acestor forțe, *egale* în modul, sînt însă cu totul diferite, din cauza deosebirii colosale în privința masei celor două corpuri.

La fel, forțele de atracție gravitațională reciprocă între Lună și Pămînt, între oricare satelit și Pămînt, între Pămînt și Soare etc. sînt egale în modul și opuse ca sens.

În cazul interacțiunii electrostatice, de asemenea, forța de atracție sau de respingere, exercitată de un purtător de sarcină asupra altuia, este totdeauna egală în modul și opusă ca sens forței exercitate de cel de-al doilea purtător de sarcină asupra primului. Cele două forțe acționează pe *aceeași* dreaptă, dreapta care unește cei doi purtători.

2.5. PRINCIPIUL SUPRAPUNERII FORȚELOR

Fie un punct material asupra căruia acționează trei forțe care își fac echilibru: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ (fig. 2.15). Aceasta înseamnă că suma a două forțe, de exemplu, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ este egală în modul și de sens opus cu cea de-a treia forță: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$.

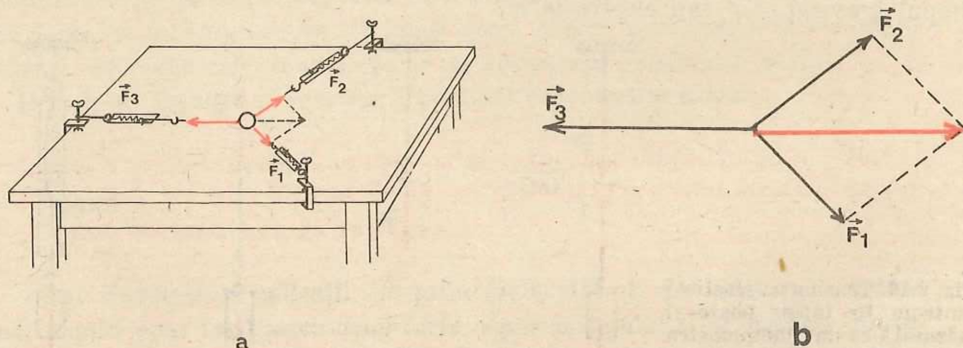


Fig. 2.15. Punct material supus la trei forțe care își fac echilibru: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.

Forța $\vec{F}_1$, *aplicată singură* punctului material, i-ar imprima o anumită accelerație $\vec{a}_1$, conform legii fundamentale $\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$. Forța $\vec{F}_2$, aplicată singură ar da o anumită accelerație $\vec{a}_2$, $\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$ și la fel forța $\vec{F}_3 = m\vec{a}_3$ i-ar imprima accelerația $\vec{a}_3$. Accelerațiile sînt proporționale cu forțele. Dacă forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ acționează *simultan*, accelerația produsă de ele trebuie să fie egală în modul și de sens opus cu accelerația $\vec{a}_3$ produsă de $\vec{F}_3$, de vreme ce corpul rămîne în repaus. Prin urmare, accelerația rezultantă se compune, după regula paralelogramului, din accelerațiile pe care le-ar produce *separat* fiecare forță componentă dacă ar acționa singură. De asemenea, accelerația imprimată de o forță nu depinde de viteza momentană a corpului (în mecanica *relativistă* accelerația nu este riguros coliniară cu forța, și depinde și de viteza corpului).

Astfel de considerații conduc la formularea *principiului independenței acțiunii forțelor* sau *principiului suprapunerii forțelor:*

dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație în mod independent de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale.

I. NEWTON a formulat acest principiu separat de celelalte trei principii sub forma următoare:

un corp, sub acțiunea simultană a două forțe, descrie diagonala unui paralelogram avînd ca laturi aceste forțe, în același timp în care ar descrie separat fiecare latură sub acțiunea forței corespunzătoare.

Acest principiu arată deci că forțele și accelerațiile produse de ele sînt mărimi *vectoriale* care se compun după regula paralelogramului, și ne permite să rezolvăm probleme cînd asupra corpului acționează simultan mai multe forțe.

În adevăr, cazul unei *singure* forțe se prezintă rar, și anume, atunci cînd interacțiunea corpului cu mediul exterior este dată *în principal* de interacțiunea sa cu un *singur* corp, interacțiunile cu celelalte corpuri putînd fi neglijate.

EXEMPLU

Dacă aruncăm o piatră, asupra ei acționează, pe de o parte, forța de greutate $\vec{G}$, datorită interacțiunii cu Pămîntul, și pe de altă parte forța arhimedică și forțele de frecare cu aerul, care se opun mișcării, dar care într-o primă aproximație pot fi neglijate. Care este atunci accelerația pietrei în mișcarea sa liberă în atmosferă? Conform legii fundamentale, n-avem decît să împărțim forța $\vec{G}$ la masa corpului și obținem vectorul accelerației $\vec{g} = \vec{G}/m$, orientat vertical în jos (fig. 2.16).

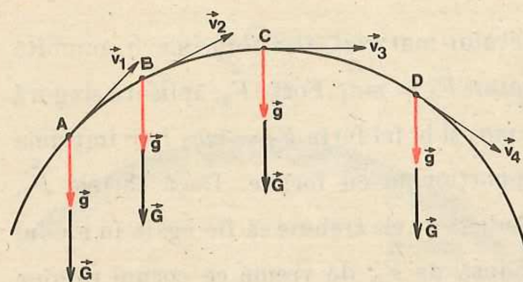


Fig. 2.16. În mișcarea liberă în vid a unui corp accelerația sa $\vec{g}$ este tot timpul aceeași, orientată vertical în jos ca și forța de greutate $\vec{G}$.

În practică, asupra corpului acționează aproape totdeauna simultan mai multe forțe, printre care este forța de greutate, deoarece nici un corp de pe Pămînt nu poate fi sustras interacțiunii sale gravitaționale cu Pămîntul. În afară de aceasta, corpul este în contact cu mediul, adică în contact cu alte corpuri (așezat pe un plan, sprijinit de un perete, mișcat într-un fluid). La contactul cu un solid apar, după cum am văzut, două forțe: reacțiunea normală și forța de frecare. În cazul mișcării într-un fluid (la contactul solid-fluid) apar de asemenea două forțe: forța arhimedică (verticală) și forța de rezistență (opusă vitezei). În sfîrșit, asupra corpului se pot exercita forțe de tracțiune sau de împingere prin fire sau tije.

După ce am ales corpul pe care vrem să-l studiem și l-am izolat mintal, reprezentăm *toate* forțele care acționează *asupra lui* și care sînt evident rezultatul interacțiunii sale cu mediul exterior.

În cazul unui corp aproximat printr-un *punct material*, toate forțele se aplică în acest punct, deci sînt forțe *concurente* și se compun după *regula paralelogramului sau a poligonului.*

În cazul mișcării de *translație* a unui corp forțele pot fi deplasate paralel și compuse ca la punctul material.

De altfel, în rezolvarea problemelor practice nu este de obicei necesar să compunem forțele, ci mai degrabă să le *descompunem*.

În cazul particular cînd toate forțele acționează *pe direcția mișcării*, alegem dreapta respectivă drept axă Ox (cu sensul pozitiv ales în sensul vitezei) și considerăm forțele pozitive dacă acționează în sensul pozitiv ales și negative dacă acționează în sensul negativ. Suma algebrică a acestor forțe ne dă forța rezultantă, pozitivă dacă acționează în sensul pozitiv și negativă în caz contrar:

$$\Sigma F = ma.$$

(Litera sigma majusculă, Σ, înseamnă *sumă*.)

Cînd toate forțele acționează *în planul mișcării*, alegem în acel plan două direcții convenabile (de obicei perpendiculare între ele) și descompunem toate forțele, viteza și accelerația, după cele două direcții alese. De cele mai multe ori alegem axele *perpendiculare* între ele, Ox, Oy, atunci paralelogramul vectorilor devine un *dreptunghi* și componentele vectorilor se obțin prin *proiecție ortogonală*. Mișcarea plană se descompune în două mișcări rectilinii după cele

două axe și deci pentru fiecare axă separat scriem formulele din cazul mișcării rectilinii.

Prin urmare, ecuația fundamentală $\vec{R} = \Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ scrisă pentru un punct material dat se aplică totdeauna *proiectînd-o pe axele de coordonate* ortogonale între ele (două axe în cazul mișcării plane și trei axe în cazul mișcării în spațiu), adică *pe componente*.

Suma componentelor pe o axă Ox a tuturor forțelor aplicate unui corp (punct material sau corp în mișcare de translație) este egală cu masa corpului înmulțită cu componenta accelerației pe aceeași axă.

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \dots = ma_x \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots = ma_y \\ (F_{1z} + F_{2z} + \dots = ma_z) \end{cases} \quad (2.14)$$

2.6. PRINCIPIUL RELATIVITĂȚII ÎN MECANICA NEWTONIANĂ

Încă pentru Galilei era clar că prin experiențe mecanice, efectuate în interiorul unui sistem (laborator), este imposibil de determinat mișcarea rectilinie uniformă a acestuia față de stele sau față de Soare sau chiar față de Pămînt. Iată ce scria Galilei în 1632 despre fenomenele mecanice dintr-o cabină închisă a unei corăbii:

„Dacă mișcarea corăbiei este rectilinie uniformă, nu veți observa nici cea mai mică schimbare în toate fenomenele și nu veți putea hotărî, ținînd seama de vreunul din aceste fenomene, dacă corabia se mișcă sau stă pe loc. Sărind, veți parcurge pe podea aceleași distanțe ca și atunci cînd corabia se află în repaus, adică, datorită mișcării rapide a corăbiei, nu veți face sărituri mai mari spre pupă, decît spre prora corăbiei, deși, în timpul cît vă aflați în aer, podeaua de sub voi fuge în partea opusă săriturii sau, aruncînd un obiect oarecare unui prieten, nu va trebui să-l aruncați cu o forță mai mare, dacă prietenul se va afla lîngă prora corăbiei, iar dumneavoastră lîngă pupă, decît dacă veți ocupa poziții inverse; picăturile dintr-o cană cu apă atîrnată în tavan vor cădea vertical pe podea și nici una din ele nu va cădea în direcția pupei, deși în timpul cît picătura se află în aer, corabia înaintează. Muștele își vor continua zborul, indiferent în ce direcție, și niciodată nu se va întîmpla ca ele să se strîngă spre partea mai apropiată de pupă, ca și cum ar obosi să se tot țină după mersul rapid al corăbiei."

Acesta este de fapt conținutul principiului relativității mecanice.

Principiul relativității al lui Galilei se poate formula astfel: nici o experiență mecanică efectuată în *interiorul* unui sistem de referință inerțial nu ne permite să determinăm mișcarea sa rectilinie uniformă față de alte sisteme de referință inerțiale (față de stele și nebuloase). Altfel spus:

legile mecanicii sînt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale.

De aici rezultă că din punct de vedere mecanic toate sistemele de referință inerțiale, deci cele care se mișcă rectiliniu uniform unele față de altele și față de stele, sînt *absolut echivalente*, nici un sistem de referință inerțial nu poate fi considerat fix sau absolut, toate sînt egal justificate.

În adevăr, primul principiu al mecanicii (principiul inerției) este valabil în oricare sistem de referință inerțial, deoarece este chiar folosit pentru a defini aceste sisteme. Deoarece măsurarea *forței* poate fi redusă la măsurarea unor lungimi și durate (măsurarea simultană a capetelor alungirii unui resort), iar lungimile și duratele sînt invariante

în mecanica clasică newtoniană, rezultă că şi forţa este aceeaşi în diferite sisteme de referinţă inerţiale (este vorba de forţe dependente numai de distanţe şi viteze relative), deci şi principiul III al acţiunii şi reacţiunii este valabil în aceste sisteme. În sfîrşit, am arătat cu ajutorul transformărilor lui Galilei că şi *acceleraţia are caracter invariant* faţă de sistemele de referinţă inerţiale, de aceea şi principiul fundamental (II) este valabil în orice sistem de referinţă inerţial (masa este o constantă în mecanica clasică). Prin urmare:

principiile mecanicii newtoniene fiind invariante la transformările Galilei, rezultă că toate legile mecanicii newtoniene (care sînt consecinţe ale principiilor) *sînt invariante la transformările lui Galilei adică sînt aceleaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale.*

După cum am spus, un fizician închis într-un laborator nu poate determina cu ajutorul experienţelor mecanice locale mişcarea rectilinie uniformă a laboratorului său faţă de sistemele de referinţă inerţiale, dar poate determina o mişcare curbilinie accelerată a laboratorului. Astfel, prin experienţe mecanice efectuate chiar pe Pămînt se poate dovedi mişcarea de rotaţie diurnă a Pămîntului: amintim, de exemplu, celebra experienţă a lui Foucault din 1851 cu rotaţia planului de oscilaţie al unui pendul.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un cărucior cu ciment, cu masa $m = 100$ kg, este ridicat cu ajutorul unei macarale cu o forţă $F = 1{,}20$ kN. Care este acceleraţia căruciorului?

Rezolvare. Asupra căruciorului acţionează *două* forţe: greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$, în jos, şi forţa de tracţiune $\vec{F}$ exercitată de macara prin cablu, în sus (neglijăm forţa arhimedică şi forţele de frecare) (fig. 2.17). Alegînd axa Ox vertical în sus, în sensul mişcării, avem

$$F - mg = ma,\ a = \frac{F - mg}{m} = 2{,}2\ \text{m/s}^2.$$

O b s e r v a ţ i e. Forţa F poate fi exercitată prin intermediul unui fir trecut peste scripete. Vom presupune totdeauna în problemele de mai jos că firul este de masă neglijabilă, subţire, flexibil şi inextensibil. De asemenea, vom presupune totdeauna că scripetele este *ideal*, adică de masă neglijabilă şi cu frecări neglijabile în lagărele sale (cu rulmenţi).

Un scripete ideal schimbă convenabil direcţia forţei: de o parte şi de alta a scripetelui forţa de întindere a *firului* va fi aceeaşi. Se poate verifica aceasta cu ajutorul unor dinamometre prinse de cele două capete ale firului (fig. 2.18).

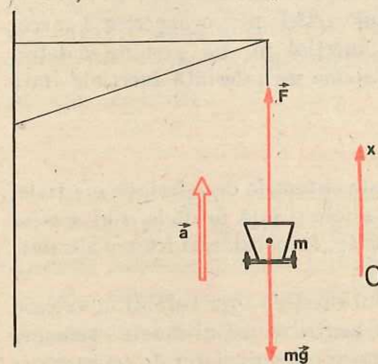


Fig. 2.17. La problema rezolvată 1.

Prin *tensiunea din fir* se înţelege forţa care întinde firul şi care se poate măsura tăind firul şi intercalînd un dinamometru (fig. 2.19). Tensiunea din fir este o forţă elastică care se datorește deformării (alungirii) elastice a firului. Astfel de tensiuni în cabluri sau bare din cadrul diferitelor construcţii (poduri, acoperişuri etc.) trebuie neapărat cunoscute pentru a alege cablul sau bara de grosime corespunzătoare ca să nu se rupă.

2. Peste un scripete ideal este trecut un fir de capetele căruia sînt atîrnate două corpuri de

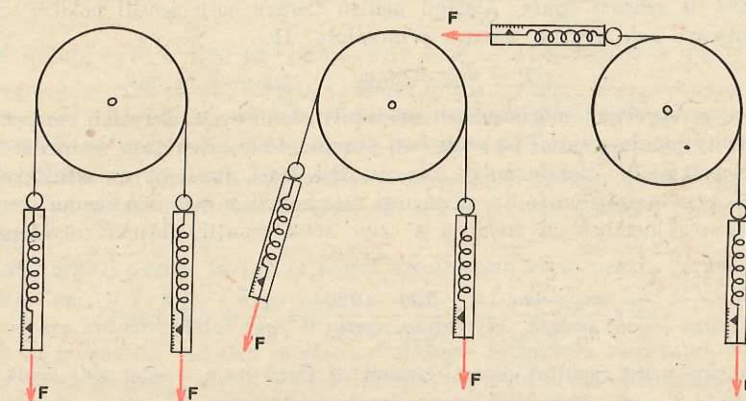


Fig. 2.18. Un scripete ideal (de inerţie neglijabilă şi frecări neglijabile în lagăre) schimbă convenabil direcţia forţei: de o parte şi de alta a scripetelui forţa de întindere a firului (tensiunea din fir) este aceeaşi.

mase $m_1 = 220$ g şi $m_2 = 230$ g. Să se calculeze acceleraţia sistemului şi tensiunea din fir (fig. 2.20).

Rezolvare. Un scripete ideal schimbă convenabil *direcţia* forţei, deci de o parte şi de alta a scripetelui *tensiunea din fir este aceeaşi.*

Asupra fiecărui corp acţionează forţa de tensiune din fir T în sus şi forţa de greutate în jos. Diferenţa acestor două forţe produce acceleraţia corpului. Cele două corpuri, fiind legate prin fir, se mişcă solidar, m_2 în jos, m_1 în sus, cu acceleraţii egale în

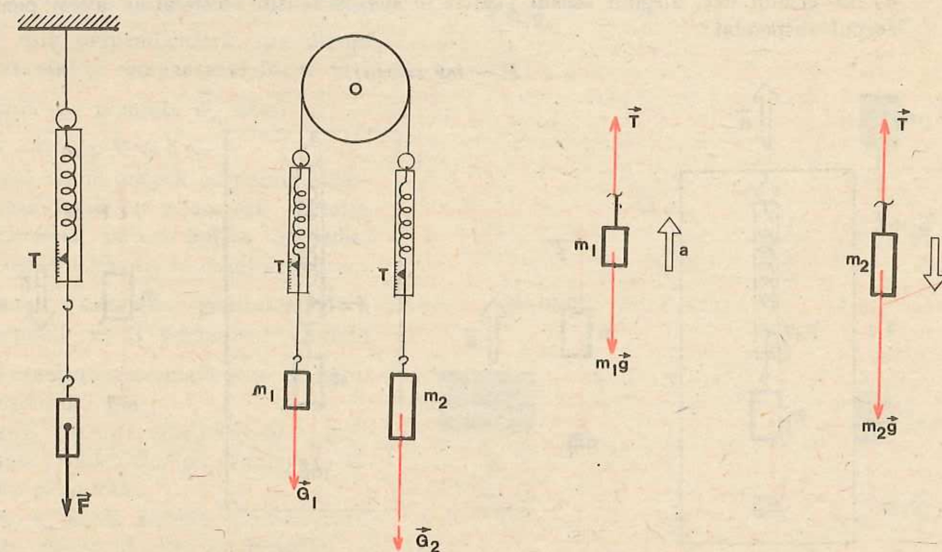


Fig. 2.19. Tensiunea dintr-un fir este forţa care întinde firul şi se poate măsura cu un dinamometru inserat pe fir.

Fig. 2.20. Un scripete peste care este trecut un fir cu două corpuri atîrnate la capete (la exemplul rezolvat 2).

modul dar de sensuri opuse. Alegînd pentru fiecare corp sensul pozitiv al axei în sensul mişcării *sale*, scriem ecuaţia principiului II:

$$T - m_1g = m_1a, \qquad m_2g - T = m_2a.$$

Aici *T*, *a*, *g* reprezintă mărimea sau modulul tensiunii, acceleraţiei, respectiv acceleraţiei gravitaţionale, semnul (+) sau (—) provine de la orientarea vectorilor respectivi faţă de sensul *pozitiv ales de noi* pe axa mişcării. Dacă am inversa sensul axei, ecuaţia respectivă s-ar înmulţi cu (—1), adică toţi membrii şi-ar schimba semnul.

Prin adunarea membru cu membru a celor două ecuaţii, obţinem acceleraţia sistemului:

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = g\frac{230 - 220}{220 + 230} = \frac{g}{45} = 0{,}218 \text{ m/s}^2.$$

Putem obţine acest rezultat direct, scriind că forţa $(m_2g - m_1g)$ este egală cu masa sistemului $(m_1 + m_2)$ înmulţită cu acceleraţia sistemului *a*.

Introducînd expresia acceleraţiei *a* în prima sau a doua ecuaţie de mai sus, găsim tensiunea din fir:

$$T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} = 2{,}20 \text{ N}.$$

3. Într-un lift este suspendat de tavan un dinamometru de care atîrnă un corp cu masa m = 1,00 kg. Ce forţă indică dinamometrul dacă liftul se mişcă cu acceleraţia a = = 2,0 m/s² îndreptată: *a)* în sus, *b)* în jos (fig. 2.21).

Rezolvare. Dacă liftul este în repaus, resortul dinamometrului este întins cu o forţă egală cu greutatea corpului atîrnat, acesta fiind în repaus:

$$F = G = mg = 1{,}00 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 9{,}8 \text{ N}.$$

a) În primul caz, alegînd sensul pozitiv în sus, în sensul acceleraţiei, avem pentru corpul suspendat:

$$F - mg = ma,$$

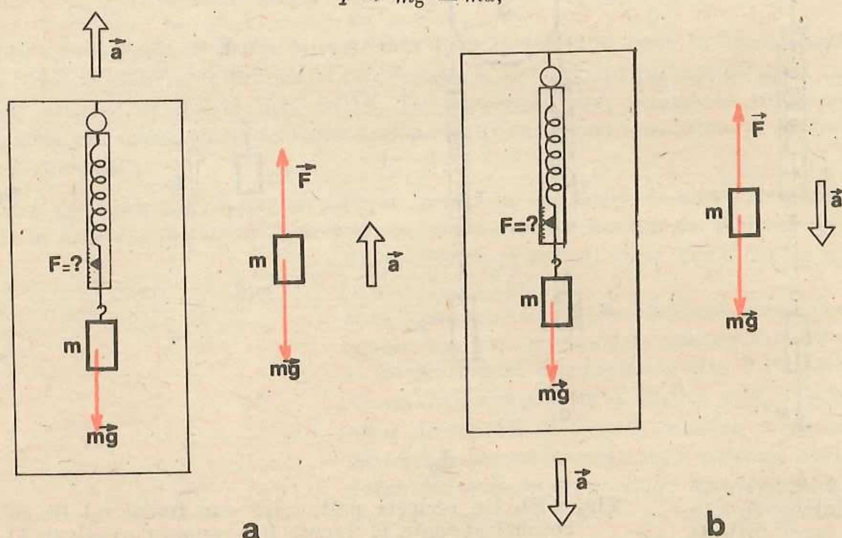


Fig. 2.21. Dinamometrul suspendat de tavanul unui lift accelerat şi avînd un corp suspendat la capăt dă indicaţii diferite de greutatea corpului. (Problema rezolvată 3.).

de unde

$$F = m(g + a) = 1{,}00 \text{ kg} \cdot (9{,}8 + 2{,}0) \text{ m/s}^2 = 11{,}8 \text{ N} > G = 9{,}8 \text{ N}.$$

Acest caz are loc cînd liftul porneşte accelerat în sus. Atunci corpul rămîne la început puţin în urmă datorită inerţiei sale, resortul se întinde, se naşte o forţă elastică *suplimentară* necesară pentru a *accelera* corpul. Exact la fel se întîmplă cînd liftul coboară şi începe să frîneze (aceeaşi acceleraţie ca mai sus). Corpul în virtutea inerţiei caută să-şi menţină viteza, întinde resortul, se naşte o forţă elastică *suplimentară* care îl *frînează*.

b) Alegînd sensul pozitiv în jos, în sensul acceleraţiei, avem pentru corpul suspendat: $mg - F = ma$, $F = m(g - a) = 1{,}00 \text{ kg} \cdot (9{,}8 - 2{,}0) \text{ m/s}^2 = 7{,}8 \text{ N} < G = 9{,}8 \text{ N}$

Acest caz are loc cînd liftul urcă şi începe să frîneze. Atunci corpul caută să-şi menţină viteza în sus, în virtutea inerţiei, şi slăbeşte întinderea resortului. La fel, cînd liftul porneşte accelerat în jos, corpul rămîne iniţial în urmă şi întinderea resortului scade. Dacă liftul cade liber în jos cu acceleraţia $a = g$, dinamometrul va indica forţa *zero* (starea de „imponderabilitate": oricare corp din cabina liftului cade liber cu aceeaşi acceleraţie de cădere liberă, ca şi liftul). Dacă liftul ar fi tras în jos cu o acceleraţie $a > g$, resortul ar fi comprimat.

Calculaţi ce forţă de apăsare simte un om de masă m = 70 kg din partea podelei liftului în cazurile de mai sus.

O b s e r v a ţ i e. Un corp aşezat pe un *plan orizontal* neted, fără frecări, exercită o forţă de apăsare asupra planului, deformîndu-l. Apare atunci o forţă de reacţiune $\vec{N}$ din partea planului, exercitată asupra corpului (principiul III). Forţa $\vec{N}$ este perpendiculară pe planul orizontal şi compensează forţa verticală de greutate $\vec{G}$, adică $\vec{N}$ = $= -\vec{G}$ sau $\vec{N} + \vec{G} = 0$.

Dacă acum asupra corpului acţionează forţe pe o aceeaşi direcţie *orizontală*, putem aplica întocmai consideraţiile de la cazul unidimensional, deoarece greutatea $\vec{G}$ a corpului va fi permanent anulată de reacţiunea normală $\vec{N}$ a planului orizontal.

Acest caz intervine frecvent în mişcarea vehiculelor pe drumuri rectilinii orizontale.

4. Pe o masă netedă, fără frecări, este aşezat un corp de masă m_1 = = 5,0 kg de care este prins un fir orizontal, trecut peste un scripete ideal şi avînd la capăt un corp de masă m_2 = 2,0 kg (fig. 2.22). Să se calculeze acceleraţia sistemului şi tensiunea din fir.

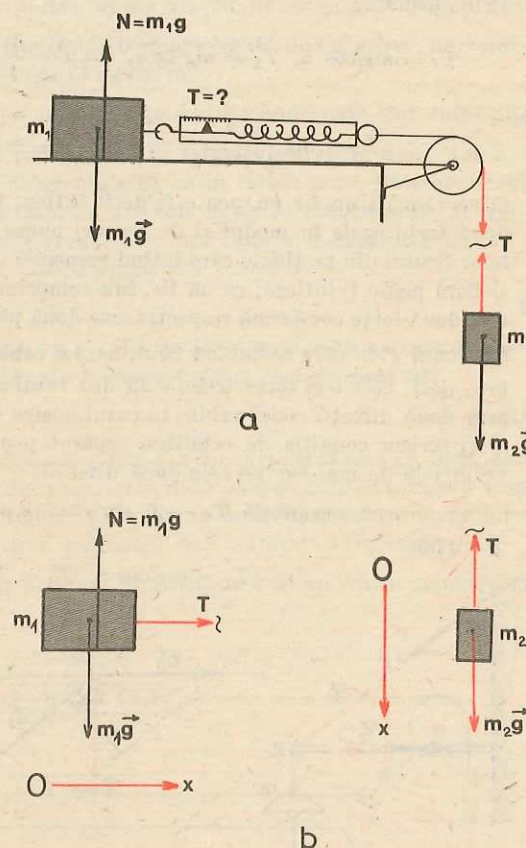


Fig. 2.22. Care este acceleraţia sistemului şi ce forţă indică dinamometrul? (Exemplul rezolvat 4.)

Rezolvare. Forța de greutate $G_1 = m_1 g$ a corpului m_1 este anulată de reacțiunea normală N_1 a mesei orizontale. Forțele de frecare sînt neglijabile. Scripetele fiind ideal, tensiunea din fir este aceeași de o parte și de alta a scripetelui.

Alegem axa Ox pentru fiecare corp în direcția și sensul mișcării sale. Atunci ecuația fundamentală se scrie astfel:

$$T = m_1 a, \quad m_2 g - T = m_2 a,$$

de unde

$$a = g \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 2{,}8 \text{ m/s}^2; \quad T = m_1 a = 14 \text{ N}.$$

5. O lampă cu masa $m = 3{,}0$ kg este suspendată ca în figura 2.23 Să se afle tensiunea din fir (de lungime $l = 0{,}50$ m) și din bară (de lungime $b = 0{,}40$ m).

Rezolvare. Putem judeca în două moduri:

a) Descompunem greutatea lămpii $\vec{G}$ după direcția firului și a barei. Pentru aceasta ducem prin originea și prin vîrful vectorului $\vec{G} = m\vec{g}$ (desenat separat) paralele la cele două direcții. Componenta $\vec{G_1}$ întinde firul și este anihilată de tensiunea $\vec{T_1}$ din fir, iar componenta $\vec{G_2}$ comprimă bara și este anihilată de tensiunea $\vec{T_2}$ din bară. Prin urmare:

$$T_1 = mg/\cos\alpha, \quad T_2 = mg \operatorname{tg}\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - b^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = b\frac{1}{\sqrt{l^2 - b^2}}.$$

Deci

$$T_1 = mg\frac{l}{\sqrt{l^2 - b^2}} = 49 \text{ N}, \quad T_2 = mg\frac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}} = 39{,}2 \text{ N}.$$

Observăm că un fir nu poate fi decît întins; în fiecare secțiune a firului acționează două forțe egale în modul și de sensuri opuse, acțiunea și reacțiunea, aplicate capetelor firului din secțiune, care întind respectiv cele două părți ale firului.

O bară poate fi întinsă, ca un fir, sau comprimată. În ultimul caz, în fiecare secțiune, cele două forțe comprimă respectiv cele două părți ale barei.

b) Nodul P în care se îmbină firul, bara și cablul de susținere al lămpii este în echilibru, deci cele trei forțe trebuie să dea rezultantă nulă: $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{G} = 0$. Alegem două direcții convenabile, în cazul nostru cea orizontală și cea verticală (fig. 2.23, *c*) și scriem condiția de echilibru separat pentru fiecare direcție, proiectînd ecuația vectorială de mai sus pe cele două direcții:

$$\text{pe orizontală } T_2 - T_1 \sin\alpha = 0, \quad \text{pe verticală } T_1\cos\alpha - mg = 0.$$

De unde

$$T_1 = mg/\cos\alpha, \quad T_2 = T_1 \sin\alpha = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

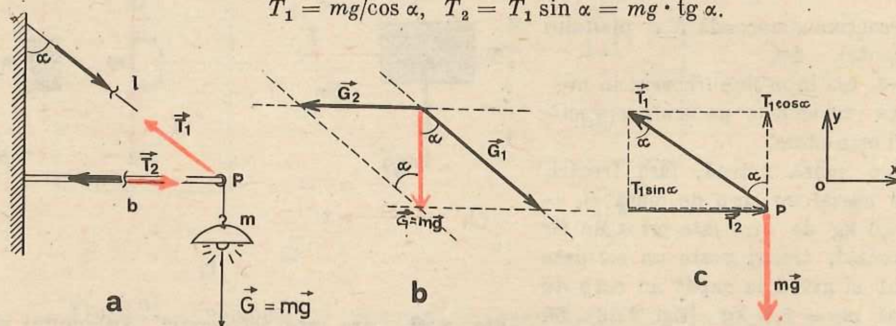


Fig. 2.23. Descompunerea forțelor în problema rezolvată 5.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un muncitor sparge lemne cu toporul. La spargerea unui butuc, toporul a rămas înfipt în butuc. Cum trebuie să lovim de un suport rigid: cu butucul în jos sau cu dosul toporului în jos, pentru a sparge butucul? (*Indicație:* a se compara inerțiile, adică masele toporului și butucului.)

   R: cu butucul în sus, dacă masa acestuia e mai mare.

2. Pentru a îndepărta praful, hainele sau covoarele sînt scuturate sau bătute. Explicați aceste două procedee.

   R: în virtutea inerției particulele de praf continuă să meargă înainte sau rămîn pe loc.

3. De ce atunci cînd vrem să introducem mînerul de lemn într-un ciocan, topor sau lopată, lovim cu capătul liber al mînerului de un obiect masiv imobil?

   R: masa mînerului e mai mică (v. probl. 1).

4. De ce este greu să batem un cui într-un gard prost fixat care se leagănă? Ce trebuie să facem ca să putem totuși bate cuiul?

   R: apăsăm de partea opusă cu un obiect masiv (topor, ciocan).

5. Dacă stăm într-o barcă ușoară și tragem de o sfoară legată de un vapor, ne vom apropia de vapor. De ce nu se apropie vaporul de barcă?

   R: deși forțele sînt egale în modul, accelerațiile imprimate sînt total diferite.

6. Un dinamometru ușor este legat prin două fire orizontale trecute peste doi scripeți, de două corpuri identice, fiecare de greutate G, ca în figura 2.24. Dinamometrul va indica: 1) zero, fiindcă cele două forțe de greutate egale se echilibrează; 2) forța $2G$, fiindcă fiecare din cele două forțe de greutate întinde resortul dinamometrului; 3) forța de greutate G a unui singur corp. Care răspuns este corect?

   R: 3)

7. O sfoară este întinsă orizontal de doi elevi. La mijlocul sforii este un inel de care este agățat un corp cu masa de 1 kg. Poate fi sfoara întinsă *perfect* orizontal?

   R: nu.

8. În ce constă eroarea afirmației: „Nu pot mișca din loc (accelera) nici un corp, deoarece la orice acțiune de-a mea, oricît de mare, exercitată asupra corpului, acesta răspunde automat cu o reacțiune egală în modul și opusă ca sens (conform principiului egalității acțiunii și reacțiunii), care îmi anihilează deci automat orice acțiune"?

   R: acțiunea și reacțiunea se aplică la corpuri diferite.

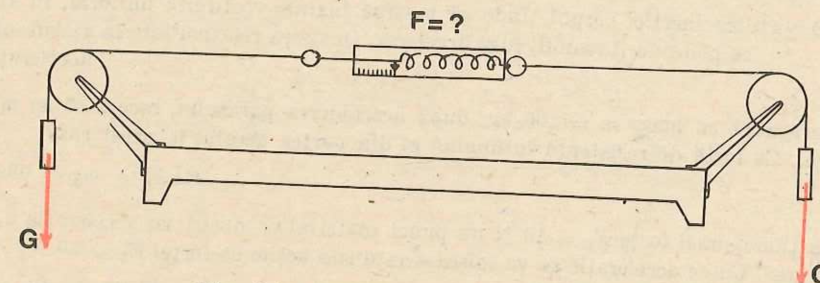


Fig. 2.24. Ce forță arată dinamometrul?

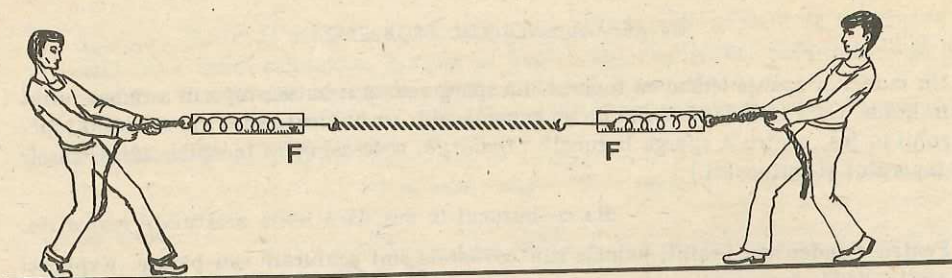


Fig. 2.25. Forțele cu care este trasă sfoara de către elevi sînt permanent egale în modul și opuse ca sens. Totuși elevul mai tare învinge și îl trage pe cel mai slab spre el. De ce?

9. Doi elevi trag de un capăt și de altul o sfoară, opintindu-se cu picioarele de pămînt (fig. 2.25). Cele două forțe, cu care fiecare acționează asupra celuilalt prin intermediul sforii, sînt permanent egale în modul și opuse ca sens, conform principiului egalității acțiunii și reacțiunii (ceea ce se poate verifica punînd pe fiecare elev să tragă de sfoară prin intermediul unui dinamometru prins de un capăt). Totuși elevul mai puternic va învinge, trăgînd pe cel slab de partea sa. Cum explicați aceasta?

R: intervin și forțele de frecare cu solul.

10. Două vagoane au la tampoanele lor resorturi identice. Vagoanele se ciocnesc. Se consideră mai multe cazuri: unul din vagoane este în repaus; amîndouă se mișcă; unul este încărcat, celălalt gol etc. Să se compare între ele, comprimările celor două resorturi în aceste cazuri.

R: se comprimă egal.

11. Un vapor ciocnește o barcă, pe care o rupe, fără ca el să aibă vreo stricăciune, sau un camion lovește un cărucior și îl strică fără a avea el însuși vreo stricăciune etc. Nu contrazice aceasta principiul acțiunii și reacțiunii?

R: nu; efectele forțelor depind de proprietățile corpurilor.

12. Cum sînt deformate resorturile tampoanelor între diferite vagoane consecutive la un tren *tras* de locomotivă și la un tren *împins* de locomotivă?

R: alungirile, respectiv comprimările scad de la locomotivă spre capătul liber.

13. *a)* Cum explicați răsturnarea corpurilor într-un vehicul care frînează brusc sau virează brusc?

b) Cum explicați devierea obiectelor suspendate într-un vagon care accelerează rectiliniu sau virează? În ce sens are loc devierea?

R: în virtutea inerției corpul tinde să meargă înainte rectiliniu uniform, în timp ce podeaua (tavanul) fuge accelerat. Devierea relativă este în sensul opus accelerației.

14. Un parașutist cu masa $m = 100$ kg, după deschiderea parașutei, începe să se miște uniform. Ce forță de rezistență întîmpină el din partea aerului în acest caz?

R: $F_r = mg = 980$ N.

15. Sub acțiunea unei forțe $F_1 = 10$ N un punct material se mișcă cu accelerația $a_1 = 2,0$ m/s². Cu ce accelerație se va mișca acesta sub acțiunea forței $F_2 = 50$ N?

R: $a_2 = a_1 \cdot F_2/F_1 = 10$ m/s².

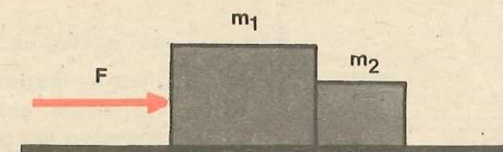


Fig. 2.26. Cu ce forță împinge corpul m_1 corpul m_2?

16. Un corp cu masa $m_1 = 5,0$ kg, sub acțiunea unei forțe, a căpătat accelerația $a_1 = 4,0$ m/s². Ce accelerație va căpăta un corp de masă $m_2 = 20$ kg sub acțiunea aceleiași forțe?

R: $a_2 = a_1 \cdot m_1/m_2 = 1,0$ m/s².

17. O minge cu masa $m = 0,40$ kg după lovire a căpătat o viteză $v = 10$ m/s. Dacă durata lovirii a fost $\Delta t = 4,0$ ms, să se afle forța medie de ciocnire.

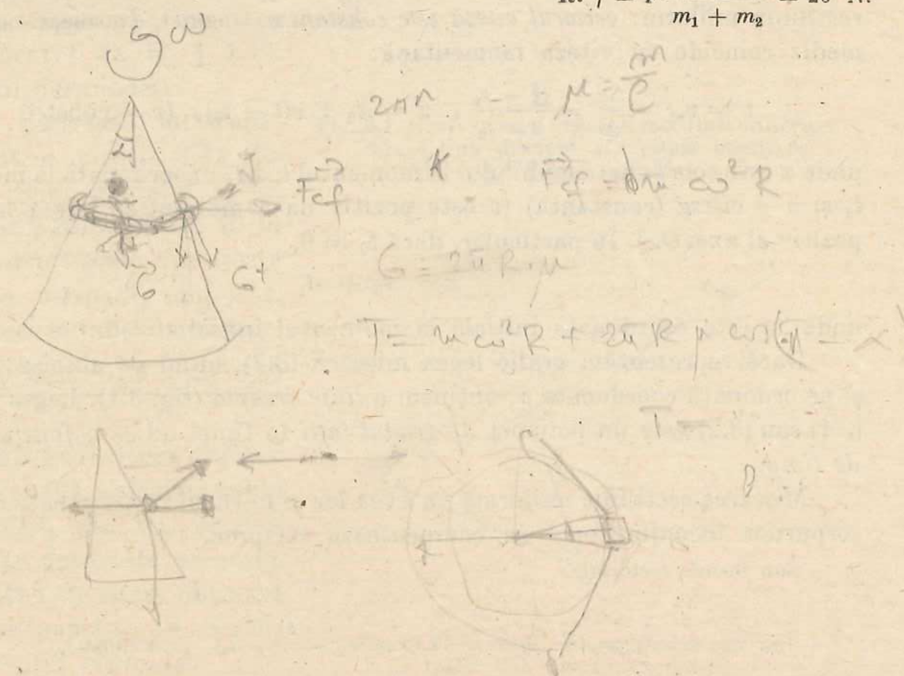
R: $F_m = m\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = 1,0$ kN.

18. O sîrmă de oțel rezistă pînă la o forță de întindere (de rupere) $F_r = 1,20$ kN. Cu ce accelerație maximă putem ridica, cu ajutorul acestei sîrme, un bloc de beton de masă $m = 100$ kg atîrnat la capătul sîrmei?

R: $a_{max} = F_r/m - g = 2,2$ m/s².

19. Două corpuri paralelipipedice de mase $m_1 = 20$ kg și $m_2 = 5,0$ kg sînt așezate alăturat pe o masă orizontală netedă fără frecări. Corpul de masă m_1 este împins cu o forță orizontală $F = 100$ N (fig. 2.26). Cu ce forță corpul m_1 împinge corpul m_2?

R: $f = F\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} = 20$ N.



3

MIŞCAREA PUNCTULUI MATERIAL SUB ACŢIUNEA UNOR TIPURI DE FORŢE

Cunoscînd forţele care acţionează asupra punctului material, se poate determina mişcarea sa. Vom studia numai cazurile simple, dar frecvent întîlnite în practică.

3.1. MIŞCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

Conform principiului inerţiei, un punct material izolat ($\vec{F} = 0$) se mişcă rectiliniu uniform: *vectorul viteză este constant* $\vec{v} =$ const. În acest caz viteza medie coincide cu viteza momentană:

$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}, \quad x = x_0 + v(t - t_0), \quad (v = \text{const.}), \qquad (3.1)$$

unde x este coordonata mobilului la momentul t, x_0 = coordonata la momentul t_0 şi v — *viteza* (constantă) (v este pozitiv dacă mobilul se mişcă în sensul pozitiv al axei Ox). În particular, dacă $t_0 = 0$,

$$x = x_0 + vt, \qquad (3.2)$$

unde x_0 este coordonata iniţială la momentul iniţial $t = 0$.

Dacă reprezentăm grafic legea mişcării (3.2), luînd pe abscisă timpul t şi pe ordonată coordonata x, obţinem o *linie dreaptă* (fig. 3.1). Legea mişcării (3.1) sau (3.2) este un polinom de *gradul întîi* în timp, adică o *funcţie liniară de timp*.

Mişcarea rectilinie uniformă va avea loc şi în cazul în care toate acţiunile corpurilor înconjurătoare se compensează reciproc.

Sub formă vectorială:

$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0), \quad (\vec{v} = \text{const.}), \qquad (3.3)$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie la momentul t, iar $\vec{r}_0$ — vectorul de poziţie la momentul t_0 (de multe ori $t_0 = 0$) (fig. 3.2). Ecuaţiile vectoriale (3.3) proiectate pe axa mişcării Ox dau ecuaţiile (3.1).

EXPERIMENT

Se realizează montajul din figura 1.29. Bara de rulare (*66*) se orizontalizează cu raportorul (*17*).

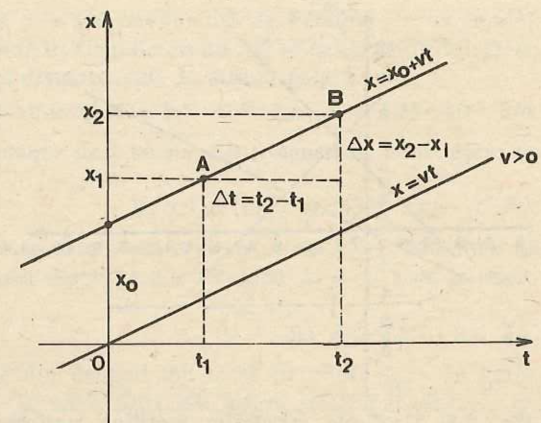
Căruciorul (*27*) încărcat cu greutăţi cu şurub (*34*)(150 g) se mişcă iniţial sub acţiunea forţei F dată de greutăţile crestate (*26*). Forţa F este anulată apoi prin oprirea greutăţilor (*26*) pe placa de amortizare (*31*), mişcarea căruciorului făcîndu-se în continuare aproximativ uniform, forţele de frecare fiind neglijabile.

a) Se măsoară viteza pentru diferite distanţe Δx, în diferite puncte ale traiectoriei, exact ca în experimentul de la § 1.12. Ce concluzii desprindeţi?

b) Se păstrează întrerupătorul *1* într-o poziţie fixă (la începutul riglei gradate) şi se mută întrerupătorul *2* din 10 în 10 cm. Pentru fiecare din aceste distanţe se măsoară timpul t. Datele se trec în tabelul următor:

x(m)	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
t(s)					

Reprezentaţi grafic legea mişcării obţinută $x = f(t)$. Calculaţi panta dreptei (adică $\Delta x/\Delta t$), alegînd două puncte depărtate pe grafic şi comparaţi-o cu viteza obţinută mai sus la punctul *a*). Scrieţi ecuaţia dreptei obţinute.



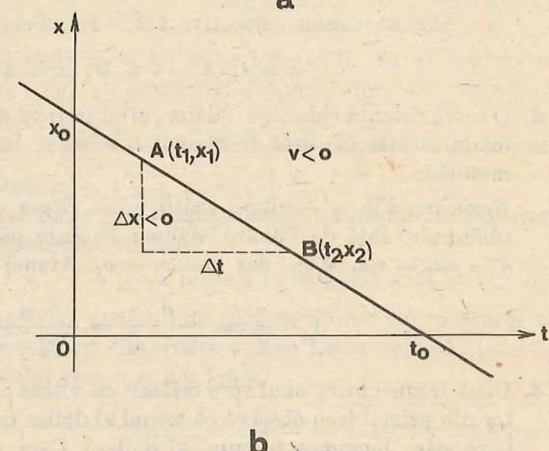


Fig. 3.1. Graficul legii mişcării rectilinii uniforme este o linie dreaptă. *a)* Viteză pozitivă. *b)* Viteză negativă.

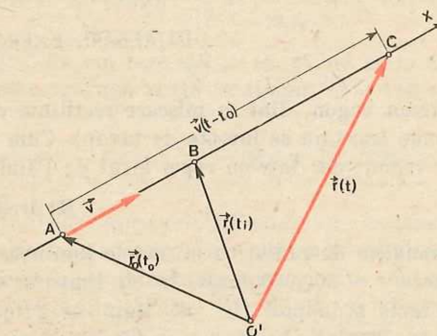


Fig. 3.2. Ecuaţia mişcării rectilinii uniforme sub formă vectorială.

PROBLEME REZOLVATE

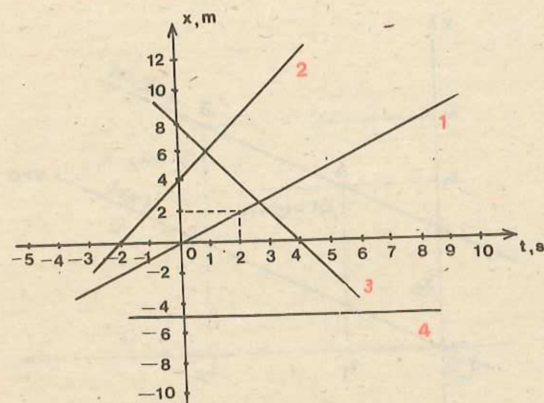


Fig. 3.3. Graficele mişcărilor rectilinii uniforme la problema rezolvată 1.

1. Să se scrie ecuaţiile mişcărilor rectilinii uniforme, reprezentate în figura 3.3.

Rezolvare. Pe axa Ox, la intersecţia cu graficul mişcării, citim coordonata iniţială x_0 pentru $t = 0$. Găsim respectiv: 0; 4; 8; -5. Viteza se găseşte luînd două puncte convenabile pe grafic (fie punctele de intersecţie cu axele, fie originea şi un punct de pe grafic), ducînd paralele la axe şi calculînd raportul catetelor în triunghiul format: $v = \Delta x/\Delta t$. Găsim respectiv: 1;2;-2;0. Prin urmare, ecuaţiile sînt ($x = x_0 + vt$):

$$x = t;\quad x = 4 + 2t;\quad x = 8 - 2t;\quad x = -5.$$

2. O scară rulantă ridică un călător, aflat în repaus pe scară, în timpul $t_1 = 30$ s. Pe scara imobilă călătorul urcă în timpul $t_2 = 60$ s. În cît timp t urcă călătorul pe scara mobilă?

Rezolvare. Fie v_s — viteza scării, v_c — viteza călătorului faţă de scară şi v — viteza călătorului faţă de Pămînt. Atunci distanţa parcursă se scrie în cele trei cazuri: $d = v_s t_1 = v_c t_2 = vt$, dar $v = v_c + v_s$. Atunci

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{v_c + v_s} = \frac{d}{d/t_2 + d/t_1} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 20 \text{ s}.$$

3. Două trenuri merg unul spre celălalt cu viteze $v_1 = 72$ km/h şi $v_2 = 54$ km/h. Un călător din primul tren observă că trenul al doilea trece prin dreptul său un timp $\tau = 4{,}0$ s. Care este lungimea trenului al doilea? Care sistem de referinţă este mai potrivit pentru rezolvare?

Rezolvare. Faţă de călătorul din primul tren, trenul al doilea trece cu viteza $v_1 + v_2$, deci $l_2 = (v_1 + v_2)\tau = 140$ m. Se poate raţiona şi faţă de trenul al doilea.

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. Într-un vagon aflat în mişcare rectilinie uniformă un elev aruncă vertical în sus o minge (care nu se loveşte de tavan). Cum va arăta traiectoria mingii în reperul legat de vagon; dar într-un reper legat de Pămînt?

R: dreaptă verticală; curba din fig. 2.16 (parabolă).

2. Semnalele de radio, ca şi undele luminoase, se propagă în vid rectiliniu uniform cu viteza $c = 300\,000$ km/s. În cît timp un semnal de radio se propagă de la Pămînt la Lună şi înapoi? În cît timp se propagă lumina de la Soare la Pămînt? (Distanţa Pămînt - Lună $d_{PL} = 384\,000$ km, Pămînt-Soare $d_{PS} = 149{,}5 \cdot 10^6$ km.)

R: $t = 2\dfrac{d_{PL}}{c} = 2{,}56$ s; $t = \dfrac{d_{PS}}{c} = 8$ min 18 s.

3. Steaua polară se află la o distanţă $d = 460$ ani lumină de Pămînt. Un an lumină reprezintă distanţa parcursă de lumină în timp de un an. Să se calculeze în kilometri valoarea unui an-lumină, precum şi distanţa pînă la steaua polară.

R: 1 an-lumină $= 9{,}5 \cdot 10^{12}$ km; $d = 4{,}37 \cdot 10^{15}$ km.

4. În cît timp lumina parcurge o distanţă de 1,00 m, dar diametrul unui atom de hidrogen ($1{,}06 \cdot 10^{-10}$ m)?

R: 3,3 ns (nanosecunde); $0{,}35 \cdot 10^{-18}$ s.

5. Sunetul se propagă în aer practic rectiliniu uniform cu viteza $c = 340$ m/s. La ce distanţă s-a produs un fulger, dacă sunetul s-a auzit după $\Delta t = 10$ s de la observarea fulgerului?

R: $d = c\Delta t = 3{,}4$ km.

6. Un autobuz merge prima jumătate din drumul său total cu viteza $v_1 = 60$ km/h, iar cealaltă jumătate cu viteza $v_2 = 40$ km/h. Care este viteza medie a autobuzului pe întreaga distanţă?

R: $v_m = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 48$ km/h.

7. Ecuaţiile mişcării a doi biciclişti sînt: $x_1 = 8t$, $x_2 = 200 - 12t$. Să se reprezinte grafic legile mişcării şi să se afle locul şi momentul întîlnirii lor. Ce reprezintă coeficientul lui t în aceste ecuaţii?

R: $x = 80$ m, $t = 10$ s; viteza.

8. Ecuaţiile mişcării a două mobile sînt: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + 2t$.
Să se construiască graficele mişcării. Să se afle locul şi momentul întîlnirii mobilelor. Care este semnificaţia fizică a răspunsului obţinut?

R: $x = 0$, $t = -1$ s (s-au întîlnit în originea axei în trecut).

9. O barcă cu motor, mişcîndu-se împotriva sensului de curgere a unui rîu, parcurge o distanţă $d = 9{,}0$ km în $\tau = 0{,}50$ h. În cît timp va parcurge barca aceeaşi distanţă înapoi, dacă viteza de curgere a rîului este $v = 6{,}0$ km/h?

R: $\tau' = \tau\dfrac{d}{d + 2v\tau} = 0{,}30$ h $= 18$ min.

10. Distanţa $d = 100$ km dintre două porturi fluviale este parcursă de o şalupă în sensul curentului în $t_1 = 4{,}0$ h, iar împotriva curentului în $t_2 = 10{,}0$ h. Care este viteza apei şi viteza şalupei faţă de apă?

R: $v_a = \dfrac{t_2 - t_1}{2t_1t_2}d = 7{,}5$ km/h; $v_0 = \dfrac{t_1 + t_2}{2t_1t_2}d = 17{,}5$ km/h.

11. În cît timp este ridicat de o scară rulantă un om care stă pe ea, ştiind că la aceeaşi viteză relativă faţă de scară, omul urcă scara nemişcată în timpul $t_1 = 120$ s, iar pe scară mobilă în $t_2 = 30$ s?

R: $T = \dfrac{t_1t_2}{t_1 - t_2} = 40$ s.

12. Din Bucureşti şi Ploieşti pleacă simultan unul spre celălalt cîte un autobuz cu vitezele constante $v_1 = 60$ km/h şi respectiv $v_2 = 40$ km/h. În acelaşi moment dintr-unul din autobuze îşi ia zborul spre celălalt autobuz un porumbel călător, care continuă să zboare neîntrerupt, între cele două autobuze, de la unul la celălalt, cu viteza constantă $v = 70$ km/h, pînă la întîlnirea autobuzelor. Ce drum total străbate porumbelul? (Distanţa Bucureşti — Ploieşti este $d = 60$ km.)

R: $s = d\dfrac{v}{v_1 + v_2} = 42$ km.

13. Pe șoseaua București-Brașov, pleacă din București un camion cu viteza $v_1 = 50$ km/h. Din Ploiești (la distanța $s_0 = 60$ km) pleacă un alt camion cu viteza $v_2 = 60$ km/h, după un timp $t_0 = 1,5$ h de la plecarea primului camion. După cît timp și în ce loc se vor întîlni camioanele? Să se reprezinte grafic pe aceeași diagramă coordonatele celor două camioane în funcție de timp.

R: $T = \frac{v_2 t_0 - s_0}{v_2 - v_1} = 3,0$ h; $L = v_1 T = 150$ km.

14. Un barcagiu vîslește perpendicular către țărm cu o viteză $v_0 = 7,2$ km/h față de apă. Cursul apei deplasează barca cu o distanță $d = 150$ m în josul rîului. Lățimea rîului este $L = 500$ m. Care este viteza rîului și durata traversării rîului?

R: $v = v_0 d/L = 0,60$ m/s; $T = L/v_0 = 4$ min 10 s.

15. Pe un strung trebuie strunjită o piesă de forma unui trunchi de con cu razele bazelor $r_1 = 15$ mm, $r_2 = 20$ mm și înălțimea $h = 50$ mm. Viteza de deplasare longitudinală a cuțitului este $v_1 = 5,0$ mm/s. Care trebuie să fie viteza v_2 de avans transversal?

R: $v_2 = v_1 \frac{r_2 - r_1}{h} = 0,50$ mm/s.

3.2. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ

Dacă vectorul forță este *constant*, atunci din legea fundamentală rezultă că *și vectorul accelerație este constant:* $\vec{a} = \vec{F}/m =$ const. În acest caz accelerația medie coincide cu accelerația momentană: $\vec{a}_m = \vec{a}$.

Dacă forța are direcția vitezei, mișcarea va fi *rectilinie*. În adevăr, accelerația și variația vitezei au direcția și sensul forței: $\vec{F} = m\vec{a} = m\Delta\vec{v}/\Delta t$, deci în acest caz variația vitezei $\Delta\vec{v}$ are direcția vitezei, care își păstrează astfel direcția neschimbată.

Vectorii forță, viteză și accelerație sînt toți pe aceeași dreaptă pe care o alegem drept axă a coordonatelor Ox (a absciselor). Sensul pozitiv pe axă se alege de obicei în sensul vitezei (inițiale).

3.2.1. **Legea vitezei.** Din definiția accelerației rezultă:

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \text{const.} \rightarrow v = v_0 + a(t - t_0), \quad (3.4)$$

unde v este viteza la un moment oarecare t și v_0 este viteza la momentul t_0, iar a este *accelerația constantă*. Aceasta este *ecuația sau legea vitezei în mișcarea rectilinie uniform variată.*

În particular, dacă viteza (inițială) v_0 este cunoscută pentru momentul (inițial) $t = 0$ (adică $t_0 = 0$), ecuația de mai sus devine:

$$v = v_0 + at. \quad (3.5)$$

În diagrama viteză — timp această ecuație se reprezintă printr-o *linie dreaptă* (fig. 3.4 și 3.5), de aceea se spune că *în mișcarea rectilinie uniform variată viteza variază liniar cu timpul* sau *este o funcție liniară de timp* (adică este un polinom de gradul întîi în timp). Panta acestei drepte este chiar accelerația a.

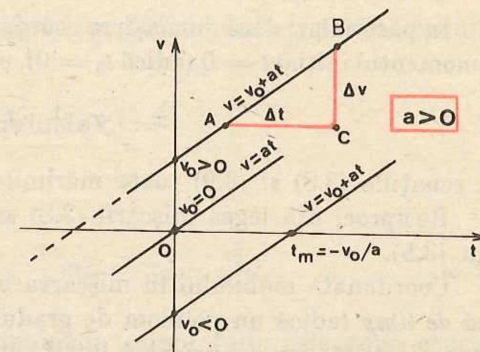


Fig. 3.4. Graficul vitezei în mișcarea uniform variată (accelerație pozitivă).

Viteza inițială v_0 (la momentul inițial $t = 0$) poate fi pozitivă (mobilul se mișcă în momentul $t = 0$ în sensul pozitiv al axei), negativă (mobilul se mișcă în momentul $t = 0$ în sensul negativ al axei) sau nulă (mobilul era în repaus în momentul $t = 0$). În ultimul caz legea (3.5) devine $v = at$, adică viteza crește proporțional cu timpul. De obicei alegem sensul pozitiv al axei în sensul vitezei inițiale v_0 (atunci $v_0 > 0$) sau al accelerației dacă $v_0 = 0$ (atunci $a > 0$).

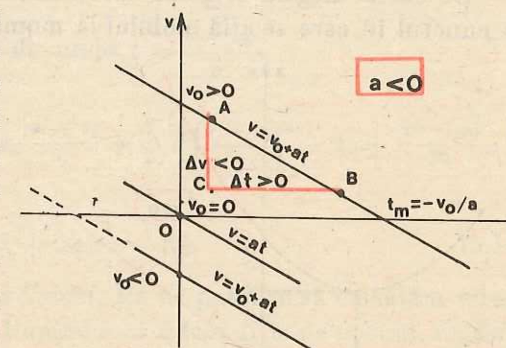


Fig. 3.5. Graficul vitezei în mișcarea uniform variată (accelerație negativă).

Din graficul vitezei putem determina accelerația, luînd două puncte pe grafic $A(t_1, v_1)$ și $B(t_2, v_2)$ și calculînd $\Delta v/\Delta t$, adică panta dreptei (fig. 3.4 și 3.5).

3.2.2. **Legea mișcării.** Din expresia vitezei medii $v_m = \Delta x/\Delta t = (x - x_0)/(t - t_0)$, rezultă

$$x = x_0 + v_m(t - t_0). \quad (3.6)$$

În mișcarea uniform variată, cînd viteza este o funcție *liniară* de timp, viteza medie este egală cu *media aritmetică* a vitezelor inițială și finală pe intervalul considerat, de aceea (3.6) devine:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0). \quad (3.7)$$

Cum $v = v_0 + a(t - t_0)$, ecuația (3.7) devine:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2. \quad (3.8)$$

Aceasta este *legea mișcării rectilinii uniform variate.*

Pentru a scrie ecuația (3.8) trebuie să cunoaștem *condițiile inițiale, adică coordonata și viteza la un moment dat:* $x = x_0$ și $v = v_0$ pentru $t = t_0$.

În particular, dacă cunoaştem coordonata (iniţială) x_0 şi viteza (iniţială) v_0 la momentul iniţial $t = 0$ (adică $t_0 = 0$), ecuaţia precedentă devine mai simplă:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \qquad (3.9)$$

În ecuaţiile (3.8) şi (3.9) toate mărimile pot fi pozitive, negative sau nule.

Reciproc, din legea mişcării (3.8) sau (3.9) se obţine legea vitezei (3.4) sau (3.5).

Coordonata mobilului în mişcarea uniform variată este o funcţie *pătratică de timp* (adică un polinom de gradul doi în timp). Coeficientul lui t este viteza iniţială, iar coeficientul lui t^2 este *jumătate* din acceleraţie (termenul liber este coordonata iniţială).

De obicei alegem originea coordonatelor (de unde măsurăm coordonata) în punctul în care se află mobilul la momentul iniţial $t = 0$, atunci $x_0 = 0$, iar sensul pozitiv al axei îl luăm în sensul vitezei iniţiale v_0, atunci $v_0 > 0$. În cazul $x_0 = 0$, avem

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \qquad (3.10)$$

Dacă şi $v_0 = 0$, ecuaţia devine

$$x = \frac{1}{2} at^2, \qquad (3.11)$$

adică, dacă mobilul pleacă din repaus din originea coordonatelor, coordonata sa este proporţională cu *pătratul timpului*.

Reprezentînd grafic legea (3.9), obţinem curbele din figura 3.6 (graficul unei funcţii pătratice este o *parabolă*). De obicei $v_0 > 0$ şi ne interesează mişcarea numai pentru $t > 0$.

Dacă acceleraţia este *negativă*, graficul are un maxim în momentul opririi mobilului.

Dacă $v_0 > 0$ şi $a < 0$ mobilul se depărtează de origine *încetinit*, la un moment dat se opreşte ($v = 0$, x maxim) şi se întoarce înapoi ($v < 0$). Durata mişcării pînă la oprire se obţine imediat, punînd condiţia de oprire $v = 0$:

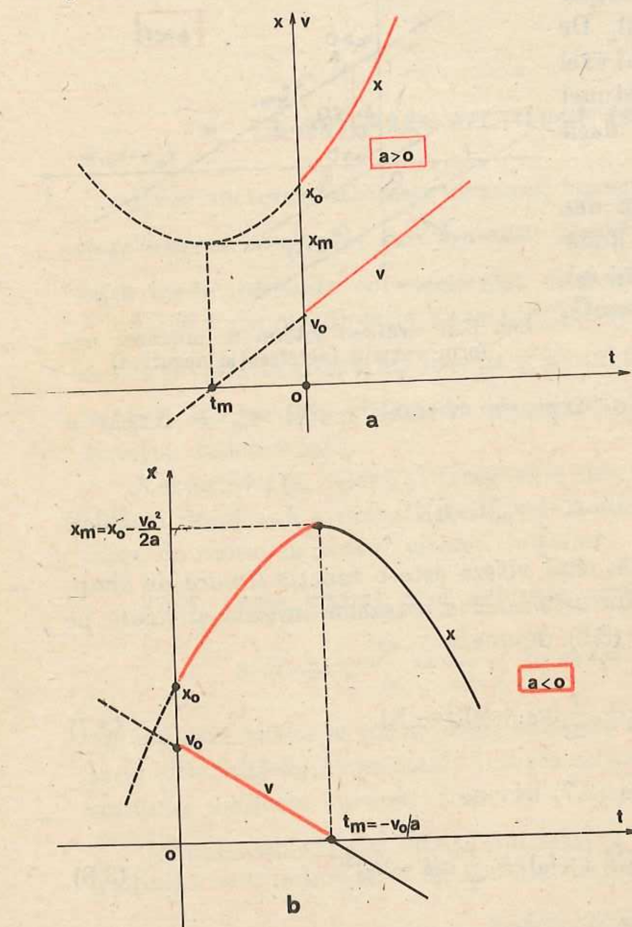


Fig. 3.6. *a)* Dacă acceleraţia este pozitivă, coordonata are un minim cînd mobilul are viteză nulă. *b)* Dacă acceleraţia este negativă coordonata are un maxim în momentul opririi (pentru $v = 0$).

$$0 = v_0 + at, \text{ de unde } t_m = -\frac{v_0}{a}, \qquad (3.12)$$

iar coordonata maximă

$$x_m = x_0 + v_0 t_m + \frac{1}{2} at_m^2 = x_0 - \frac{v_0^2}{2a}. \qquad (3.13)$$

3.2.3. **Formula lui Galilei.** Să eliminăm timpul t din cele două ecuaţii, a vitezei (3.5) şi a coordonatei (3.9). Scoatem timpul din ecuaţia vitezei şi îl introducem în ecuaţia coordonatei:

$$v = v_0 + at, \text{ de unde } t = \frac{v - v_0}{a},$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

sau

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \qquad (3.14)$$

Aceasta este *ecuaţia sau formula lui Galilei*. Ea ne permite să calculăm viteza mobilului pentru orice poziţie a sa. Punînd $v = 0$ (condiţia de oprire), regăsim (3.13).

De obicei $x_0 = 0$, adică alegem originea coordonatelor în punctul în care se afla mobilul la $t = 0$. Atunci (3.14) devine

$$v^2 = v_0^2 + 2ax. \qquad (3.15)$$

În particular, dacă şi $v_0 = 0$, adică mobilul pleacă din repaus (la $t = 0$), avem

$$v^2 = 2ax. \qquad (3.16)$$

Menţionăm că ecuaţiile mişcării rectilinii uniform variate se pot scrie *vectorial* astfel:

$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}, \text{ de unde } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0), \qquad (3.17)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_0)^2. \qquad (3.18)$$

Bineînţeles, din legea mişcării (3.18) se poate obţine prin procedeul cunoscut legea vitezei (3.17). Proiectînd aceste ecuaţii vectoriale pe axa mişcării, obţinem ecuaţiile algebrice cunoscute (pe componente). Mai mult, aceste ecuaţii vectoriale sînt valabile chiar dacă vectorii $\vec{v}_0$ şi $\vec{a}$ ($\vec{a}$ = const) *nu* sînt coliniari şi deci mişcarea *nu* este rectilinie ci curbilinie în planul definit de vectorii $(\vec{v}_0, \vec{a})$ sau $(\vec{v}_0, \vec{F})$, de exemplu în cazul aruncării în vid în cîmpul gravitaţional terestru (atunci $\vec{a} = \vec{g}$).

Se foloseşte montajul din figura 1.29.

a) Legea mişcării rectilinii uniform variate. Se procedează ca la experimentul de la § 3.1, (*b*).

Se va reprezenta grafic legea mişcării $x = f(t)$. Teoretic, ecuaţia mişcării trebuie să fie $x = \frac{1}{2}at^2$ (parabolă). Dacă trasăm graficul $x = F(t^2)$ trebuie să obţinem o *dreaptă* cu panta $\frac{a}{2}$. De aceea se va trasa şi graficul $x = F(t^2)$ şi luînd două puncte convenabile pe grafic (aproximat printr-o dreaptă) se va calcula panta $a/2$ deci acceleraţia a.

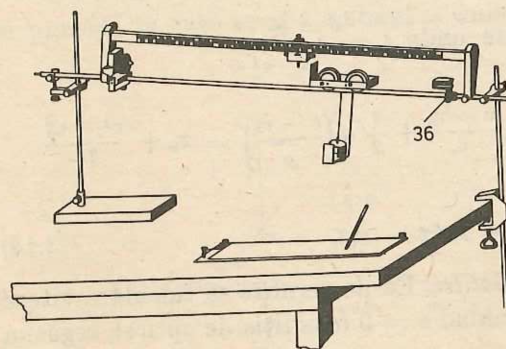


Fig. 3.7. Montaj pentru verificarea legilor mişcării rectilinii uniform variate.

b) Legea vitezei în mişcarea rectilinie uniform variată. Se montează dispozitivul de prindere (*31, 32*) astfel încît să reţină greutăţile (*26*) cînd căruciorul a străbătut fiecare din distanţele x de la experimentul precedent (fig. 3.7). În dreptul fiecărei valori x, se montează întrerupătorul (*18*) şi la o distanţă convenabilă $\Delta x'$ de acesta se montează întrerupătorul (*23*). Pe distanţa Δx parcursă în timpul $\Delta t'$, căruciorul se mişcă practic uniform *cu viteza avută în dreptul coordonatei* x, deci $v(x) = \Delta x'/\Delta t'$.

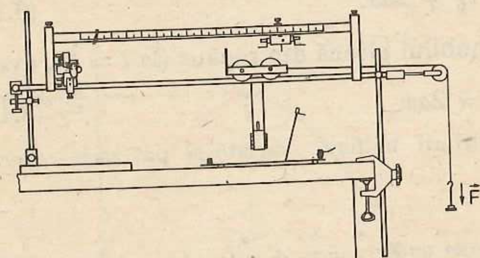


Fig. 3.8. Montaj pentru verificarea legii fundamentale a dinamicii.

Se va reprezenta grafic legea vitezei $v = f(t)$. Teoretic, legea vitezei trebuie să fie $v = at$ (dreaptă). Se va calcula panta dreptei obţinute, deci acceleraţia a, şi se va compara cu acceleţia obţinută în experienţa precedentă, din legea mişcării.

c) Legea fundamentală a dinamicii. Se realizează montajul din figura 3.8 (montajul detaliat este dat în figura 1.29). Se aleg diferite distanţe x (~ 0,5 — 0,7 m) de la vîrful electromagnetului pînă la întrerupătorul *2*. Forţa F este dată de greutăţile crestate (*26*), căruciorul (*27*) fiind încărcat cu greutăţile cu şurub (*34*).

În prima variantă, pentru o distanţă aleasă x se măsoară timpul de mişcare t sub acţiunea *diferitelor forţe F*. Se calculează acceleraţia $a = 2x/t^2$ şi

raportul F/a, care trebuie să coincidă cu masa $(M + m)$ a sistemului (cărucior cu greutăţi cu şurub + cîrligul cu greutăţile crestate).

În a doua variantă, se păstrează *constantă* forţa F dată de greutăţile crestate (*26*) şi se modifică încărcarea M a căruciorului (*27*).

PROBLEME REZOLVATE

Peste tot unde este posibil alegem originea coordonatelor în punctul în care se află mobilul la $t = 0$ (atunci $x_0 = 0$), iar sensul pozitiv pe axa mişcării îl alegem în sensul vitezei iniţiale (atunci $v_0 > 0$) sau al acceleraţiei (forţei) dacă $v_0 = 0$ (atunci $a > 0$).

1. Un şofer începe să frîneze automobilul pe un drum orizontal de la o distanţă $d = 25$ m de un obstacol. Forţa de frînare este $F_f = 1{,}5$ kN, iar masa automobilului $m = 750$ kg.
Care este viteza maximă admisibilă v_0 a automobilului pentru ca acesta să poată opri înainte de obstacol?

Rezolvare. Forţa de greutate a automobilului este anulată de reacţiunea normală a solului. Rămîne forţa de frînare orientată în sens invers mişcării (fig. 3.9). Alegînd axa Ox în sensul mişcării, avem

$$-F_f = ma, \text{ de unde } a = -F_f/m$$

(acceleraţia, la fel ca şi forţa, este orientată în sensul opus vitezei). Aplicînd direct formula (3.13) cu $x_0 = 0$, avem

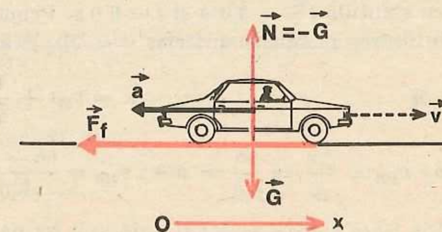


Fig. 3.9. La problema rezolvată 1.

$$d = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2F_f}m, \text{ de unde } v_0 = \sqrt{2F_f d/m} = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}.$$

Putem aplica de asemenea formula lui Galilei (cu $x_0 = 0$), punînd condiţia de oprire $v = 0$.

2. Două corpuri pornesc din acelaşi punct pe aceeaşi direcţie cu vitezele iniţiale $v_{01} = 4{,}0$ m/s, respectiv $v_{02} = 3{,}0$ m/s şi acceleraţiile $a_1 = 2{,}0$ m/s², respectiv $a_2 = 3{,}0$ m/s², corpul *2* însă la un interval $\tau = 2{,}0$ s mai tîrziu decît corpul *1*. Să se afle: *a)* după cît timp şi la ce distanţă se vor întîlni corpurile; *b)* vitezele medii ale corpurilor de la plecare pînă la întîlnire.

Rezolvare. a) Alegem originea timpului în momentul cînd porneşte primul corp, atunci $x_1 = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2$ şi $x_2 = v_{02}(t - \tau) + \frac{1}{2}a_2(t - \tau)^2$ (pentru al doilea corp t_0 este τ).
În momentul întîlnirii $x_1 = x_2$ (corpurile se află în acelaşi punct, la aceeaşi distanţă de origine):

$$v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = v_{02}(t - \tau) + \frac{1}{2}a_2(t - \tau)^2,$$

de unde $t^2 - 14t = 0$ cu soluţiile $t = 0$ şi $t = 14$ s. Prima soluţie este inacceptabilă, deoarece corpul *2* pleacă abia peste $\tau = 2{,}0$ s. Coordonata punctului de întîlnire este: $x = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = 252$ m.

b) Vitezele medii:

$$v_{1m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{252}{14} = 18 \text{ m/s}; \; v_{2m} = \frac{252}{12} = 21 \text{ m/s}.$$

3. Din originea axei Ox pleacă un mobil cu viteza inițială $v_{01} = 2,0$ m/s și accelerația $a_1 = 3,0$ m/s². În același moment, dintr-un punct de pe axa Ox, de abscisă $x_0 = 18$ m, pleacă un al doilea mobil cu viteza inițială $v_{02} = 5,0$ m/s și accelerația $a_2 = 1,0$ m/s².

a) După cît timp și la ce distanță se întîlnesc mobilele? *b)* Care sînt vitezele medii ale mobilelor în acest timp?

Rezolvare. a) Ecuațiile pentru coordonatele celor două mobile sînt:

$$x_1 = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2; \; x_2 = x_0 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2.$$

Condiția de întîlnire $x_1 = x_2$ dă

$$v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = x_0 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 \text{ sau } t^2 - 3t - 18 = 0$$

cu soluțiile $t = -3,0$ s și $t = 6,0$ s. Prima soluție este inacceptabilă deoarece înseamnă întîlnirea mobilelor anterior ($t < 0$) plecării lor. Punctul de întîlnire:

$$x = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = 66 \text{ m}.$$

$$b) \; v_{1m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{66}{6,0} = \text{m/s}; \; v_{2m} = \frac{66 - 18}{6,0} = 8,0 \text{ m/s}.$$

4. Fie legea vitezei $v = f(t)$ dată sub forma tabelului:

t[s]	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v [m/s]	1,0	1,0	1,0	2,0	4,0	8,0	10,0	4,0	0	−2,0	0	0	0

Să se reprezinte grafic această lege. *a)* Să se calculeze accelerația medie în intervalele de timp: (−4; −2) s, (−2; 2) s, (2; 5) s, (5; 6) s și (6; 8)s. *b)* Care este accelerația momentană a mobilului la momentul $t = 2,0$ s?

Rezolvare. Graficul este dat în figura 3.10.

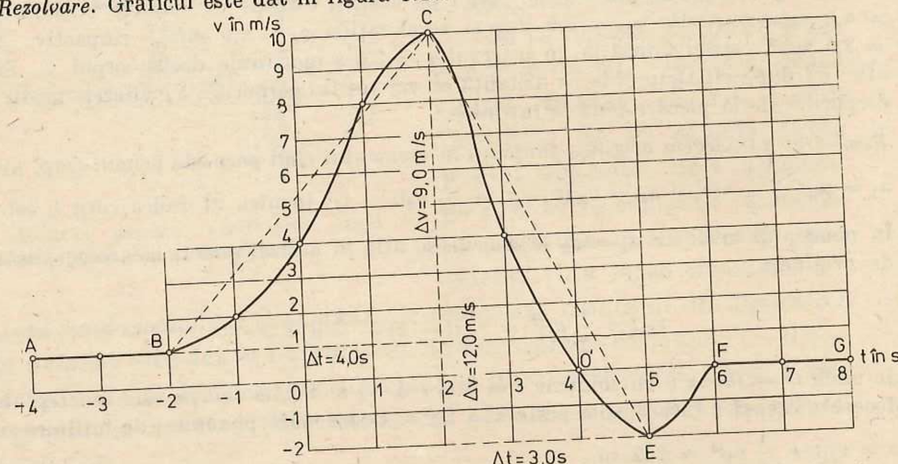


Fig. 3.10. Graficul legii vitezei la problema rezolvată 4.

a) Accelerațiile medii sînt:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0}{2} = 0; \; \frac{10,0 - 1,0}{2,0 - (-2,0)} = 2,25 \text{ m/s}^2; \; \frac{-2,0 - 10,0}{5,0 - 2,0} = -4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$\frac{0,0 - (-2,0)}{6,0 - 5,0} = 2,0 \text{ m/s}^2; \; \frac{0}{2} = 0.$$

b) Pentru un interval Δt foarte mic, descrescînd către zero, luat la $t = 2,0$ s, variația Δv este zero, viteza este constantă, graficul vitezei fiind aici orizontal, deci $a = 0$.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Cum va arăta graficul vitezei în cazul accelerației nule?

R: dreaptă orizontală.

2. Legea mișcării rectilinii a unui corp este dată de ecuația $x = 2,0 + 1,5t + t^2$. Să se scrie legea vitezei.

R: $v = 1,5 + 2t$.

3. Dacă accelerația *nu* este constantă, se poate calcula viteza medie în mișcarea rectilinie ca media aritmetică $v_m = (v_0 + v)/2$?

R: nu.

4. Să se arate că pentru mișcarea uniform variată avem:

$$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}t.$$

5. Un tren electric se mișcă cu viteza $v_0 = 72$ km/h. Întrerupîndu-se curentul electric, trenul se oprește (uniform încetinit) după $\Delta t = 20$ s. Să se afle accelerația și distanța pînă la oprire.

R: $a = -\dfrac{v_0}{\Delta t} = -1,0$ m/s²; $d = \dfrac{1}{2}v_0\Delta t = 200$ m.

6. Un automobil pornește cu accelerația $a = 0,40$ m/s². Cît timp îi trebuie ca să-și mărească viteza de la $v_1 = 12$ m/s la $v_2 = 20$ m/s?

R: $\Delta t = \dfrac{v_2 - v_1}{a} = 20$ s.

7. O săniuță coboară liber, uniform accelerat, pe un deal de lungime $l = 60$ m într-un timp $t = 10$ s. Care a fost accelerația și ce viteză a căpătat la sfîrșitul dealului?

R: $a = \dfrac{2l}{t^2} = 1,2$ m/s², $v = \dfrac{2l}{t} = 12$ m/s.

8. Un schior parcurge cu accelerația $a = 0,30$ m/s² o porțiune de pistă $\Delta x = 100$ m în $\Delta t = 20$ s. Care a fost viteza schiorului la începutul și la sfîrșitul porțiunii de pistă?

R: $v_{1,2} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \mp a\dfrac{\Delta t}{2} = 2,0$ și $8,0$ m/s.

9. Un corp cu masa $m = 0,50$ kg este tras orizontal rectiliniu uniform pe o masă orizontală (cu frecare) cu ajutorul unui dinamometru care arată o forță $F_1 = 2,0$ N. Cu ce accelerație se va mișca același corp dacă dinamometrul va arăta $F_2 = 3,0$ N?

R: $a = \dfrac{F_2 - F_1}{m} = 2,0$ m/s².

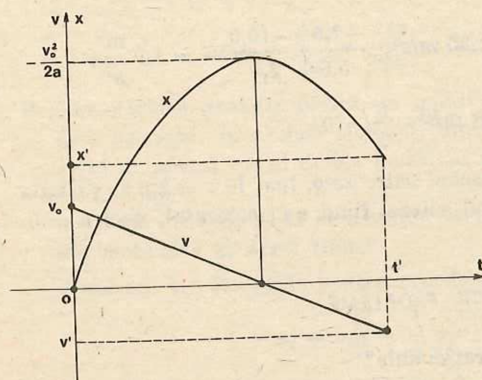


Fig. 3.11. Viteza și coordonata în mișcarea uniform variată din problema 12.

10. Un corp pornește fără viteză inițială. În prima secundă el parcurge o distanță egală cu 1 m, în a doua secundă parcurge o distanță egală cu 2 m și așa mai departe, în a n-a secundă parcurge o distanță egală cu n metri. Este aceasta o mișcare uniform accelerată?

R: nu.

11. Un corp pornește uniform accelerat cu viteza inițială $v_0 = 2{,}0$ m/s și ajunge în punctul $x_0 = 300$ m după $\tau = 1{,}0$ min. Să se afle accelerația și viteza finală.

R: $a = 2(x_0 - v_0\tau)/\tau^2 = 0{,}10\ \text{m/s}^2$; $v' = 2x_0/\tau - v_0 = 8{,}0\ \text{m/s}$.

12. Un mobil pornește uniform variat din originea axei Ox cu viteza inițială $v_0 = 15$ m/s. După un timp t' mobilul trece prin punctul de abscisă $x' = 10$ m cu viteza $v' = -10$ m/s. Să se calculeze: *a)* accelerația; *b)* timpul t'; *c)* distanța parcursă în acest timp; *d)* viteza în modul, medie. Să se reprezinte grafic, pe aceeași diagramă, viteza și coordonata.

R: *a)* $a = \frac{v'^2 - v_0^2}{2x'} = -6{,}25\ \text{m/s}^2$; *b)* $t' = \frac{2x'}{v_0 + v'} = 4{,}0$ s;

c) $d = x' \frac{v_0^2 + v'^2}{v_0^2 - v'^2} = 26$ m; *d)* $|v|_m = \frac{d}{t'} = \frac{v_0^2 + v'^2}{2(v_0 - v')} = 6{,}5$ m/s;

curba și dreapta din figura 3.11.

13. Un corp mișcat uniform variat parcurge prima jumătate din drumul său $d = 150$ m în timpul $t_1 = 10$ s, iar cealaltă jumătate în $t_2 = 5{,}0$ s. Să se afle accelerația și viteza inițială ale corpului.

R: $a = d\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 1{,}0\ \text{m/s}^2$; $v_0 = d/2t_1 - \frac{1}{2} a t_1 = 2{,}5$ m/s.

14. Din originea axei Ox pleacă un mobil cu viteza constantă $v' = 1{,}0$ m/s, iar după $\tau = 5{,}0$ s un al doilea mobil cu viteza inițială $v_0 = 5{,}0$ m/s și accelerația $a = -0{,}70\ \text{m/s}^2$. Să se afle după cît timp de la pornirea mobilului *2* se vor întîlni mobilele.

R: $v'(t + \tau) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, de unde $t = \frac{10}{7}$ s și 10 s.

3.3. MIȘCAREA CORPURILOR SUB ACȚIUNEA GREUTĂȚII

3.3.1. **Căderea liberă.** Greutatea unui corp este *forța* cu care acesta întinde firul sau resortul de care este suspendat. Ea are direcția „firului cu plumb". Sau, altfel, greutatea unui corp este forța cu care acesta apasă asupra unui plan orizontal pe care este așezat (planul orizontal este perpendicular pe direcția firului cu plumb). Greutatea unui corp se datorește atracției gravitaționale

dintre corp și Pămînt. Dacă neglijăm efectele rotației proprii diurne a Pămîntului și neomogenitățile globului terestru (care sînt într-adevăr neglijabile în majoritatea covîrșitoare a nevoilor practicii), atunci:

Greutatea unui corp este forța cu care acesta este atras de Pămînt, ea are direcția razei terestre din acel loc.

Corpurile lăsate liber în vid, fără viteză inițială, cad vertical, sub acțiunea greutății lor, cu aceeași accelerație gravitațională $\vec{g}$ ($g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$), independentă de masa corpului, natura, dimensiunile sau forma corpurilor. Conform legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$, rezultă atunci

$$\vec{G} = m\vec{g}, \tag{3.19}$$

unde $\vec{g}$ în același loc este același pentru toate corpurile. Aceasta se poate dovedi experimental cu ajutorul tubului lui Newton — un tub de sticlă vidat în care sînt introduse diferite obiecte. Răsturnînd tubul, toate obiectele cad la fel, cu aceeași accelerație. În aer însă, corpurile cad cu accelerații diferite, fiindcă pe lîngă greutatea lor $m\vec{g}$, acționează și o forță de rezistență din partea aerului, care depinde sensibil de dimensiunile și de forma corpului. În tot ce urmează vom neglija forța de rezistență a aerului (deci vom considera corpuri mici și grele).

Accelerația gravitațională de cădere liberă $\vec{g}$ depinde de altitudine (de distanța pînă la centrul Pămîntului) și puțin de latitudine (din cauza turtirii Pămîntului la poli și a rotației Pămîntului).

Accelerația gravitațională *normală* (sau standard) se consideră:

$$g_n = 9{,}80665\ \text{m/s}^2. \tag{3.20}$$

La nivelul mării și la paralela 45° : $g_0 = 9{,}80616\ \text{m/s}^2$.

Prin urmare, toate corpurile care se mișcă liber în vid au aceeași accelerație $\vec{g} = \vec{G}/m$, orientată vertical în jos la fel ca și forța de greutate $\vec{G}$ (fig. 2.16).

Dacă viteza inițială este verticală (sau nulă), corpul se va mișca pe verticală (forța fiind verticală) *uniform variat.* Alegînd axa Oy vertical în sus, avem

$$v = v_0 - g(t - t_0),\ y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2} g(t-t_0)^2,\ (g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2) \tag{3.21}$$

și în particular, dacă condițiile inițiale y_0, v_0 se referă la momentul $t = 0$ (adică $t_0 = 0$), avem mai simplu

$$v = v_0 - gt,\ y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2,\ (g \approx 9{,}8\ \text{m/s})^2. \tag{3.22}$$

În ecuațiile de mai sus, y, y_0, v, v_0 pot avea diferite semne, în funcție de poziția și sensul mișcării corpului pe axa aleasă Oy ($-g$ este componenta vectorului accelerație $\vec{g}$ pe axa Oy aleasă).

Desigur, se poate alege o axă Oy cu sensul pozitiv în jos, atunci

$$v = v_0 + g(t - t_0), \quad y = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} g(t - t_0)^2, \quad (g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2), \qquad (3.23)$$

unde y, y_0, v, v_0 au semne corespunzătoare noii axe ($+g$ este acum componenta vectorului $\vec{g}$ pe axa aleasă).

EXEMPLE

1. Un corp cade liber (fără viteză inițială) de la o înălțime h. Să se afle viteza și timpul de cădere.

Rezolvare. Este mai convenabil să alegem axa verticală Oy cu sensul pozitiv în jos și cu originea în punctul de unde cade corpul la momentul $t = 0$ (fig. 3.12). Atunci

$$v = gt, \quad h = \frac{1}{2} gt^2, \text{ de unde } v = \sqrt{2gh}, \ t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad (3.24)$$

corpul cade accelerat cu accelerația g.

2. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0. Să se afle timpul de urcare și înălțimea maximă la care se ridică corpul.

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical, cu sensul pozitiv în sus și cu originea în punctul de unde se aruncă corpul (fig. 3.13). Atunci

$$v = v_0 - gt, \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \qquad (3.25)$$

Punînd condiția de oprire $v = 0$, găsim timpul de urcare și apoi înălțimea maximă:

$$0 = v_0 - gt, \quad t_u = \frac{v_0}{g}, \quad h = y_m = v_0 t_u - \frac{1}{2} g t_u^2 = \frac{v_0^2}{2g}, \qquad (3.26)$$

corpul urcă încetinit cu accelerația $-g$.

Aceste rezultate se obțin și din formulele (3.12–3.13) pentru timpul pînă la oprire și distanța maximă din cazul mișcării uniform încetinite, dacă punem acolo $a = -g$.

După atingerea înălțimii maxime și oprire, corpul cade înapoi accelerat și cînd ajunge din nou la punctul de lansare va avea viteza finală v', egală în modul și de sens opus cu viteza inițială de lansare v_0. De asemenea, timpul de urcare este egal cu timpul de coborîre:

$$v' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \cdot \frac{v_0^2}{2g}} = v_0;$$

$$t_u = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{2}{g}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_c. \qquad (3.27)$$

Observăm că ecuațiile (3.25) descriu atît urcarea, cît și coborîrea ulterioară a corpului.

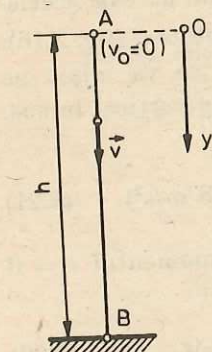


Fig. 3.12. Căderea liberă de la o înălțime h. (Exemplul 1.)

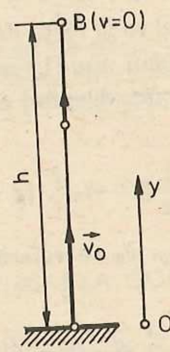


Fig. 3.13. Aruncarea unui corp vertical în sus cu viteza inițială v_0. (Exemplul 2.)

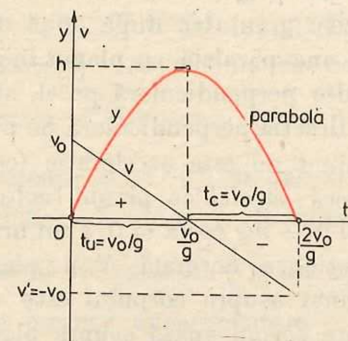


Fig. 3.14. Graficul vitezei și coordonatei unui corp aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0.

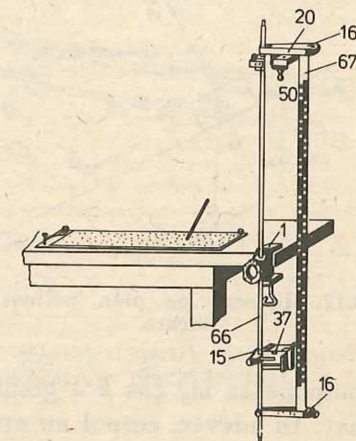


Fig. 3.15. Montajul mecanic pentru studiul căderii libere.

Dacă reprezentăm grafic pe aceeași diagramă pe v și pe y în funcție de timp: $v = v_0 - gt$, $y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$, obținem o linie dreaptă (pentru v) și o parabolă (pentru y) (fig. 3.14).

EXPERIMENT

Studiul căderii libere. Montajul mecanic este dat în figura 3.15.

Corpul a cărui mișcare se analizează este o bilă (*50*) din oțel. Din vîrful miezului electromagnetului (*20*) se lasă să cadă bila pe clapeta captorului (*37*).

Montajul electric este dat în figura 3.16.

Experimentul se face montînd captorul, succesiv, la diferite distanțe y față de reperul 0 al riglei și măsurînd de fiecare dată timpul t de cădere.

Se va reprezenta grafic legea mișcării $y = f(t)$. Teoretic: $y = \frac{1}{2} gt^2$ — parabolă. De aceea, se va trasa și graficul $y = F(t^2)$, care trebuie să fie o dreaptă cu panta $g/2$, de unde se obține accelerația gravitațională g.

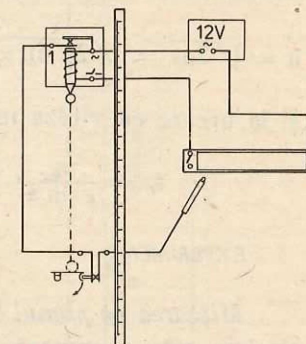


Fig. 3.16. Montajul electric pentru studiul căderii libere.

3.3.2. Mișcarea pe plan înclinat. Vom neglija frecările dintre corp și planul înclinat (de exemplu, un cărucior pe șine netede). În acest caz asupra corpului acționează: forța de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ și reacțiunea normală $\vec{N}$ a planului

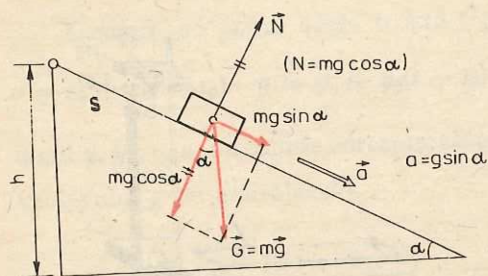


Fig. 3.17. Mişcarea pe plan înclinat fără frecare.

înclinat (fig. 3.17). Dacă descompunem greutatea după două direcţii: una paralelă cu planul înclinat şi alta perpendiculară pe el, atunci pe direcţia perpendiculară pe planul înclinat nu este acceleraţie (corpul lunecă *paralel* cu planul înclinat!), deci $N - mg \cos \alpha = 0$. Prin urmare reacţiunea normală N a planului înclinat asupra corpului este egală cu componenta $mg \cos \alpha$ a greutăţii, cu care corpul apasă asupra planului înclinat. În adevăr, corpul nu apasă asupra planului înclinat cu toată greutatea sa mg, ci numai cu componenta normală $mg \cos \alpha$, cealaltă componentă $mg \sin \alpha$ fiind *paralelă* cu planul înclinat.

Componenta $mg \sin \alpha$, paralelă cu planul înclinat (ea este bineînţeles rezultanta celor două forţe $\vec{G}$ şi $\vec{N}$), imprimă corpului o acceleraţie

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha \qquad (3.28)$$

în direcţia şi sensul acestei forţe, adică paralelă cu planul înclinat şi îndreptată în jos.

Prin urmare, un corp lăsat liber pe un plan înclinat fără frecări, va coborî uniform accelerat cu acceleraţia $a = g \sin \alpha$, iar lansat în sus de-a lungul planului înclinat cu viteza iniţială v_0 va urca încetinit, se va opri şi apoi se va întoarce înapoi accelerat. Situaţia este perfect asemănătoare cu cea din mişcarea pe verticală în cîmp gravitaţional, cu singura deosebire că mişcarea se face paralel cu planul înclinat (şi nu pe verticală), cu acceleraţia $a = g \sin \alpha$ (în loc de g).

Dacă notăm cu h înălţimea de la care coboară liber corpul şi cu s lungimea corespunzătoare a planului înclinat, atunci $h = s \sin \alpha$. Deci la coborîre liberă (fără viteză iniţială):

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2g \sin \alpha \cdot s} = \sqrt{2gh},\ t_c = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (3.29)$$

şi la urcare cu viteza iniţială v_0:

$$t_u = \frac{v_0}{g \sin \alpha},\ s = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha},\ h = \frac{v_0^2}{2g};\ (t_c = t_u,\ v' = -v_0). \qquad (3.30)$$

EXPERIMENT

Mişcarea pe planul înclinat. Se reface montajul din figura 1.29. Montajul electric este prezentat în figura 3.18.

Experimentul se realizează înclinînd bara de rulare cu 5°, fixînd întrerupătorul la diferite distanţe x şi măsurînd timpul de mişcare respectiv.

Se va reprezenta grafic legea mişcării $x = f(t)$. Teoretic (cu neglijările respective) ea trebuie să fie $x = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$. De aceea reprezentînd dependenţa $x = F(t^2)$ şi aproximînd-o printr-o dreaptă, panta acesteia trebuie să fie egală cu $\frac{1}{2} g \sin \alpha$, în limitele erorilor experimentale.

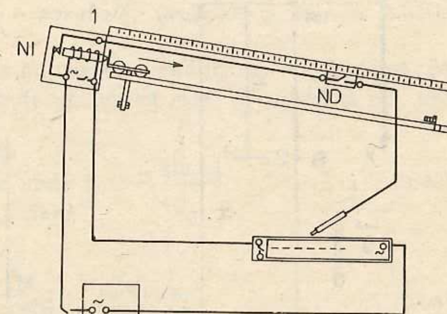


Fig. 3.18. Montajul electric pentru studiul mişcării pe planul înclinat.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp cade liber de la o înălţime $h = 15$ m fără viteză iniţială. În acelaşi timp este aruncat vertical în sus un al doilea corp cu viteză iniţială $v_0 = 10$ m/s. După cît timp şi la ce înălţime deasupra solului se întîlnesc corpurile?

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în sus cu originea în punctul de unde este aruncat corpul 2 (fig. 3.19). Atunci, ecuaţiile mişcării sînt:

$$y_1 = h - \frac{1}{2} gt_m^2,\ y_2 = v_0t - \frac{1}{2} gt^2.$$

Punem condiţia de întîlnire $y_1 = y_2$ (în momentul întîlnirii distanţa corpurilor pînă la originea O este aceeaşi):

$$y_1 = y_2,\ h - \frac{1}{2} gt^2 = v_0t - \frac{1}{2} gt^2,$$

de unde

$$t_m = \frac{h}{v_0} = 1{,}5 \text{ s};\ y_m = h - \frac{1}{2} gt_m^2 = 4{,}0 \text{ m}.$$

2. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu vitezele iniţiale $v_{01} = 60$ m/s şi $v_{02} = 40$ m/s, corpul 2 la un interval $\tau = 6{,}0$ s după primul. După cît timp şi la ce înălţime deasupra solului se vor întîlni corpurile ? (Se va lua $g = 10$ m/s².)

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în sus. Atunci ecuaţiile mişcării sînt:

$$y_1 = v_{01}t - \frac{1}{2} gt^2,\ y_2 = v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2} g(t - \tau)^2.$$

Punînd condiţia de întîlnire $y_1 = y_2$, găsim

$$t_m = \frac{g\tau^2/2 + v_{02}\tau}{g\tau + v_{02} - v_{01}} = 10{,}5 \text{ s};$$

$$y_m = v_{01}t_m - \frac{1}{2} gt_m^2 = 78{,}8 \text{ m}.$$

3. Un corp cade liber (în vid) fără viteză iniţială dintr-un punct A aflat la o înălţime $H = 4{,}9$ m. Simultan, dintr-un punct B situat cu $h = 2{,}0$ m mai jos de A, este aruncat vertical în sus un al doilea corp. Cu ce viteză iniţială v_0 a fost aruncat acesta, dacă a ajuns pe Pămînt simultan cu primul?

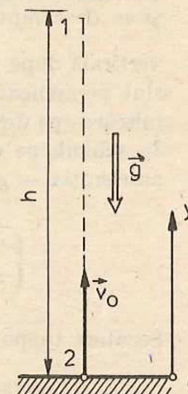


Fig. 3.19. La problema rezolvată 1.

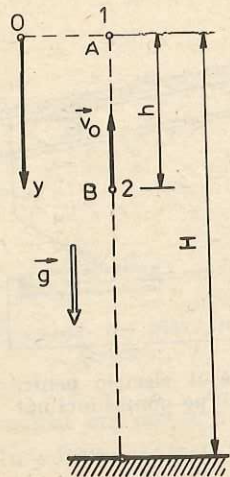


Fig. 3.20. La problema rezolvată 3.

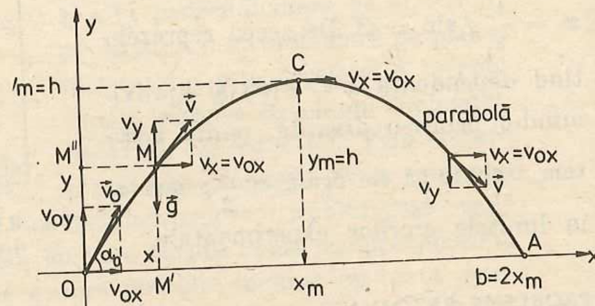


Fig. 3.21. Mişcarea în cîmp gravitaţional terestru. (Problema rezolvată 4.)

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în jos, cu originea în punctul A (fig. 3.20). Atunci ecuaţiile mişcării sînt:

$$y_1 = \frac{1}{2}gt^2,\ y_2 = h - v_0t + \frac{1}{2}gt^2$$

(componenta vitezei iniţiale $\vec{v}_0$ pe axa aleasă este $-v_0$).
Condiţia de întîlnire la suprafaţa pămîntului este:

$$y_1 = y_2 = H,\ \text{adică}\ \frac{1}{2}gt^2 = h - v_0t + \frac{1}{2}gt^2 = H,$$

de unde

$$t_m = h/v_0 \ \text{şi}\ v_0 = h\sqrt{\frac{g}{2H}} = 2{,}0\ \text{m/s}.$$

4.* Să se studieze aruncarea oblică a unui corp (în vid) cu o viteză iniţială $\vec{v}_0$ care face un unghi α_0 cu orizontala.

Rezolvare. Mişcarea va avea loc în planul vertical conţinînd forţa $\vec{G} = m\vec{g}$ şi viteza $\vec{v}_0$, şi se descompune în două mişcări: în direcţia orizontală după axa Ox şi în direcţia verticală după axa Oy (fig. 3.21). Deoarece forţa $\vec{G} = m\vec{g}$ şi acceleraţia respectivă $\vec{g}$ sînt permanent verticale, nu avem forţă şi acceleraţie pe direcţia orizontală Ox, şi mişcarea pe direcţia orizontală va fi *uniformă* cu viteza constantă $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$. În schimb pe direcţia verticală, după axa Oy, avem o mişcare *uniform variată* cu acceleraţia $-g$ şi viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0$:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha_0, \\ x = v_0t\cos\alpha_0, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt = v_0\sin\alpha_0 - gt, \\ y = v_0t\sin\alpha_0 - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases} \tag{3.31}$$

Scoatem timpul din ecuaţia lui x: $t = x/v_0\cos\alpha_0$, şi îl introducem în ecuaţia lui y:

$$y = v_0\cdot\frac{x}{v_0\cos\alpha_0}\sin\alpha_0 - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha_0} = x\operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2. \tag{3.32}$$

Aceasta este ecuaţia explicită a traiectoriei — o *parabolă*, deoarece y este o funcţie pătratică de x, de forma $y = Ax + Bx^2$.
Timpul de urcare pînă la înălţimea maximă se obţine din condiţia ca în punctul de înălţime maximă C: $v_y = 0$, deoarece aici vectorul viteză este orizontal şi nu are componentă pe axa Oy:

$$v_y = 0 = v_0\sin\alpha_0 - gt,\ \text{de unde}\ t_u = \frac{v_0\sin\alpha_0}{g} \tag{3.33}$$

şi înălţimea maximă:

$$h = y_m = v_0t_u\sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt_u^2 = \frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{2g}, \tag{3.34}$$

adică obţinem formulele cunoscute pentru timpul de urcare şi înălţimea maximă de la aruncarea verticală (3.26), dar cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0\sin\alpha_0$.
În timpul de urcare t_u deplasarea pe orizontală va fi

$$x_m = v_0t_u\cos\alpha_0 = \frac{1}{g}v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0. \tag{3.35}$$

Distanţa maximă pe orizontală OA (fig. 3.21), numită *bătaia* (proiectilului) este $2x_m$:

$$b = 2x_m = \frac{1}{g}v_0^2\,2\sin\alpha_0\cos\alpha_0 = \frac{1}{g}v_0^2\sin 2\alpha_0, \tag{3.36}$$

unde am folosit o formulă din trigonometrie: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
Dacă se aruncă corpurile cu aceeaşi viteză iniţială v_0 dar sub diferite unghiuri faţă de orizontală, bătaia maximă va fi sub unghiul α_m pentru care $\sin 2\alpha_m = 1$ în (3.36), deci $2\alpha_m = 90°$, de unde $\alpha_m = 45°$.

5.* Să se studieze aruncarea pe orizontală a unui corp (în vid).

Rezolvare. Alegem axele de coordonate ca în figura 3.22, unde h este înălţimea de la care se aruncă corpul. Se vede imediat că traiectoria coincide în acest caz cu jumătatea dreaptă a parabolei de la problema precedentă (dacă mutăm axa Oy astfel încît ea să treacă prin vîrful C). Asemănător problemei precedente avem

$$\begin{cases} v_x = v_0 = \text{const}, \\ x = v_0t, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = -gt, \\ y = h - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases} \tag{3.37}$$

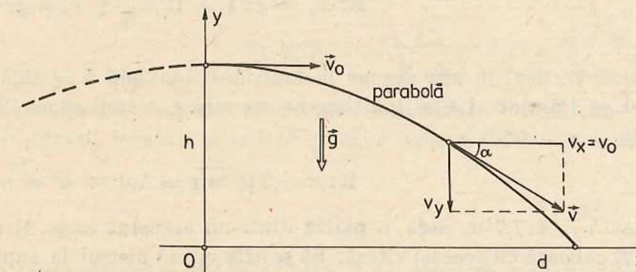


Fig. 3.22. Aruncarea orizontală a unui corp în cîmpul gravitaţional terestru. (Problema rezolvată 5.)

Din aceste ecuaţii rezultă imediat: ecuaţia traiectoriei, timpul de coborîre (punem condiţia $y = 0$), distanţa parcursă pe orizontală şi viteza finală v':

$$t = \frac{x}{v_0}; \quad y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} \text{ (parabolă)}; \qquad (3.38)$$

$$y = 0; \; t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad d = v_0 t_c = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad (3.39)$$

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v_0^2 + (-gt_c)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \qquad (3.40)$$

Observăm că ecuaţiile (3.24) şi (3.25) de la mişcarea pe verticală, cît şi ecuaţiile (3.31) de la aruncarea oblică sau (3.37) de la aruncarea orizontală se obţin imediat prin proiectarea pe cele două axe Ox, Oy a ecuaţiilor *vectoriale* (3.17—3.18) (cu $\vec{a} = \vec{g}$):

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0); \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{g} (t - t_0)^2 \qquad (3.41)$$

şi ţinînd seama, bineînţeles, că $\vec{g}$ are proiecţia zero pe Ox.

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. Un corp cade liber de la o înălţime $h = 1{,}1$ km şi parcurge astfel o distanţă $h' = 314$ m, după care îşi continuă mişcarea uniform pînă la atingerea Pămîntului. Să se afle durata mişcării.

R: $t = \frac{h + h'}{\sqrt{2gh'}} = 18$ s.

2. Un corp aruncat vertical în sus are la înălţimea h_1 viteza v_1. Să se afle viteza iniţială v_0.

R: $v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gh_1}$.

3. Considerînd că o săritură de la înălţimea $h \approx 1$ m pe Pămînt nu este periculoasă, să se calculeze înălţimea corespunzătoare pe Lună ($g = 1{,}62$ m/s²).

R: $h' = h \, g_P / g_L \approx 6$ m (2 etaje!).

4.* Un corp aruncat vertical în sus a revenit pe pămînt după un timp $\tau = 4$ s. Să se afle viteza iniţială a corpului şi înălţimea la care s-a ridicat corpul.

R: $v_0 = g\tau/2 = 19{,}6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $h = g\tau^2/8 = 19{,}6$ m.

5. Un corp aruncat vertical în sus ajunge la înălţimea maximă $h = 19{,}6$ m. După cît timp revine el pe Pămînt? La ce înălţime se va ridica corpul dacă viteza iniţială este mărită de $n = 3$ ori?

R: $\tau = 2\sqrt{2h/g} = 4{,}0$ s; $h' = n^2 h = 176{,}4$ m.

6. De la înălţimea $h = 117{,}7$ m cade o piatră dintr-un aerostat care: 1) urcă cu viteza $v_0 = 9{,}8$ m/s; 2) coboară cu aceeaşi viteză. Să se afle viteza pietrei la suprafaţa Pămîntului şi durata de cădere a pietrei în cele două cazuri.

R: $v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 49$ m/s; $t' = \frac{v' \pm v_0}{g} = 6{,}0$ şi $4{,}0$ s.

7. Să se afle înălţimea h de la care cade liber un corp şi durata T a mişcării sale ştiind că în intervalul de timp $\tau = 1{,}0$ s înainte de atingerea Pămîntului, el străbate o fracţiune $k = 0{,}19$ din înălţimea totală de la care cade.

R: $T = \tau \frac{1 + \sqrt{1 - k}}{k} = 10$ s; $h = \frac{1}{2} gT^2 = 490$ m.

8. De la înălţimea $h = 225$ m, pe o planetă oarecare, cad liber două corpuri unul după altul; al doilea începe să cadă în momentul cînd primul a parcurs $h' = 16$ m. Să se afle distanţa dintre corpuri în momentul cînd primul corp a ajuns la suprafaţa planetei.

R: $d = 2\sqrt{hh'} - h' = 104$ m.

9. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu aceeaşi viteză iniţială $v_0 = 19{,}6$ m/s şi la un interval $\tau = 2{,}0$ s unul după altul. După cît timp ele se vor întîlni? Să se reprezinte grafic coordonatele în funcţie de timp.

R: $T = v_0/g + \tau/2 = 3{,}0$ s.

10. Un corp cade liber de la o înălţime $h = 10$ m. În acelaşi moment un alt corp este aruncat vertical în jos de la o înălţime $H = 20$ m. Să se afle viteza iniţială a corpului 2, dacă ambele corpuri au căzut simultan pe pămînt.

R: $v_0 = \frac{H - h}{2h}\sqrt{2gh} = 7{,}0$ m/s.

11.* Cum se schimbă durata şi distanţa orizontală de cădere a unui corp aruncat orizontal, dacă viteza de aruncare creşte de n ori?

R: nu se schimbă; creşte de n ori.

12.* Un corp este aruncat orizontal cu viteza $v_0 = 10$ m/s. De la ce înălţime a fost aruncat, dacă această înălţime este egală cu distanţa orizontală de cădere? ($g = 10$ m/s².)

R: $h = 2v_0^2/g = 20$ m.

13.* Un corp aruncat orizontal îşi măreşte viteza de n ori după un timp τ de la începutul mişcării. Care este viteza iniţială v_0 a corpului?

R: $v_0 = \frac{g\tau}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

14.* Un avion zboară orizontal la înălţimea h cu viteza constantă v_0. Aviatorul trebuie să arunce o bombă asupra unei ţinte. Să se afle: unghiul β dintre raza vizuală spre ţintă şi verticală în momentul aruncării bombei, pentru ca ea să nimerească ţinta; distanţa d pe orizontală pînă la ţintă în acel moment. Unde se va găsi avionul în momentul cînd bomba atinge ţinta?

R: $\operatorname{tg} \beta = v_0 \sqrt{\frac{2}{gh}}$; $d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$; deasupra ţintei.

15.* Doi copii se joacă cu mingea aruncînd-o unul altuia. Ce înălţime maximă h atinge mingea în timpul jocului, ştiind că mingea zboară de la un copil la altul timp de $\tau = 2{,}0$ s?

R: $h = \frac{1}{8} g\tau^2 = 4{,}9$ m.

16*. De cîte ori este mai mare distanţa (bătaia) la care un sportiv ar arunca o greutate pe Lună faţă de Pămînt? (Acceleraţia gravitaţională pe Lună $g_L = 1{,}62$ m/s².)

R: $b_L : b_P = g_P : g_L \simeq 6$.

17.* Cu ce viteză inițială v_0 trebuie lansată o rachetă sub un unghi $\alpha = 45°$ față de orizontală, pentru ca să explodeze la înălțimea maximă a traiectoriei sale, știind că timpul de ardere a fitilului este $\tau = 6$ s?

R: $v_0 = \frac{g\tau}{\sin\alpha} = 82$ m/s.

18.* De pe puntea unui vapor care merge cu viteza constantă v_x se trage un obuz vertical în sus cu viteza v_y. Să se afle ecuația traiectoriei obuzului față de Pămînt. Unde va cădea obuzul?

R: $y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{g}{2v_x^2}x^2$; pe vapor.

19.* Un vînător ochește vîrful unui turn de înălțime $h = 20$ m. La ce distanță d de turn trebuie să tragă pentru ca glonțul care iese cu viteza inițială $v_0 = 250$ m/s să lovească baza turnului?

R: $d = \sqrt{h(2v_0^2/g - h)} = 505$ m.

20. Cu ce forță orizontală trebuie apăsat un corp de greutate $G = 10,0$ N, așezat pe un plan înclinat fără frecări, de unghi $\alpha = 60°$, pentru ca acest corp să nu lunece?

R: $F = G\ \mathrm{tg}\ \alpha = 17,3$ N.

21. Pe un plan înclinat neted, fără frecări, de unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală, este așezat un corp de masă $m = 2,0$ kg, legat printr-un fir de un alt corp de masă $M = 3,0$ kg.
Firul este întins paralel cu planul și trecut peste un scripete ideal din creștetul planului, ca în figura 3.23. Să se afle accelerația cu care se mișcă corpurile.

R: $T - Mg = Ma$; $mg \sin\alpha - T = ma$, $N - mg\cos\alpha = 0$,

de unde

$$a = g\frac{m\sin\alpha - M}{m + M} = -3,92\ \mathrm{m/s^2};\quad T = mMg\frac{1 + \sin\alpha}{m + M} = 176,4\ \mathrm{N}.$$

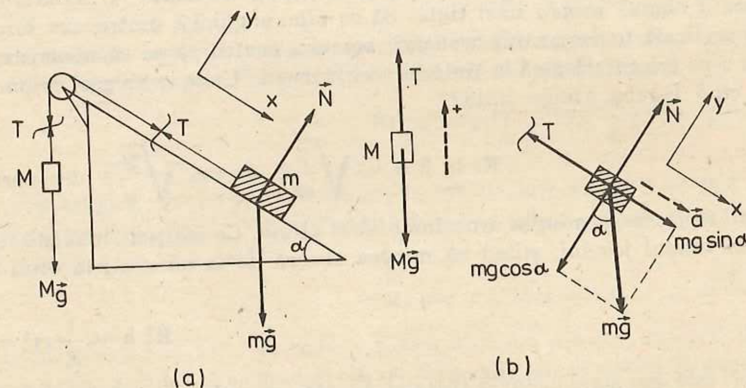


Fig. 3.23. La problema 21.

3.4.1. **Forțele de frecare la alunecare între solide.** Dacă lansăm un obiect cu o viteză inițială v_0 de-a lungul unui plan orizontal (pe o masă), el va avea o mișcare *încetinită* de lunecare și pînă la urmă se va opri. Cum se explică această mișcare încetinită? Deoarece viteza se micșorează, vectorul accelerație este opus vectorului viteză, deci și forța rezultantă trebuie să fie opusă vectorului viteză. Greutatea corpului este orientată vertical în jos și este anihilată (echilibrată) de reacțiunea normală a planului. Corpul nu are accelerație pe direcția verticală. Prin urmare trebuie să existe o forță *orizontală* de interacțiune între corp și plan. Aceasta este *forța de frecare.* Ea se datorește întrepătrunderii asperităților și neregularităților microscopice ale celor două suprafețe care lunecă una față de cealaltă. Prin urmare, mișcarea orizontală încetinită se datorește forței de frecare, exercitată de plan asupra corpului. Această *forță de frecare este conținută în planul lunecării* și este îndreptată în sens opus vitezei corpului (fig. 3.24). Desigur în planul de contact există două forțe de frecare, acțiunea și reacțiunea, egale în modul și de sensuri opuse, una acționează asupra corpului, iar cealaltă asupra planului.

Pentru a menține corpul în mișcare *uniformă* de alunecare trebuie să aplicăm o forță de tracțiune (sau de împingere) *egală* în modul și de sens opus cu forța de frecare, de exemplu, o sanie în mișcare uniformă trebuie trasă de cal.

Pentru a deplasa un obiect pe podea, de exemplu un dulap, un frigider, o masă, trebuie să împingem corpul cu o anumită forță *minimă,* necesară pentru a-l urni din loc, adică pentru a învinge înțepenirea (aderența) inițială de repaus. Dar, odată corpul pornit, este necesară o forță mai mică pentru a-l menține în mișcarea de alunecare pe podea. Dacă dulapul sau frigiderul este plin (încărcat) aceste forțe sînt mai mari, decît în cazul cînd dulapul sau frigiderul este gol.

Ori de cîte ori un corp *alunecă* peste alt corp, în planul de contact (planul alunecării), apar *forțe de frecare conținute în acest plan și orientate în sensul opus vitezei relative a corpului* considerat, față de celălalt corp. Forțele de frecare frînează totdeauna mișcarea relativă a corpurilor care alunecă.

3.4.2. **Legile frecării.** *Experiment.* Să punem pe o scîndură fixă o placă paralelipipedică dintr-un material oarecare (lemn, plastic, metal) prevăzută cu un cîrlig. Pe placă se pot pune diferite etaloane de masă, iar de cîrlig putem trage orizontal printr-un dinamometru

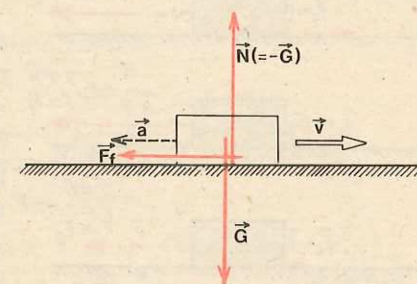


Fig. 3.24. Forța de frecare în cazul alunecării unui corp pe un plan orizontal.

6*

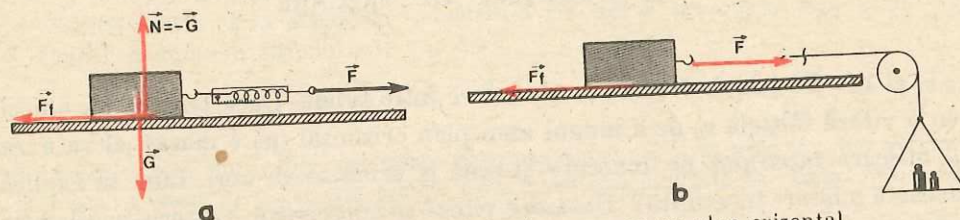


Fig. 3.25. Studiul legilor frecării la alunecare pe un plan orizontal.

sau putem lega un fir, întins orizontal şi trecut peste un scripete. La capătul firului se leagă un platan pe care putem pune diferite etaloane de masă (fig. 3.25).

Dacă tragem încet de dinamometru sau adăugăm treptat etaloane de masă pe taler, constatăm că la început placa nu porneşte. Cum greutatea plăcii este echilibrată de reacţiunea normală a scîndurii şi în plus aceste forţe sînt verticale, ele nu pot echilibra forţa de tracţiune exercitată de fir. Această forţă de tracţiune este echilibrată de *forţa de frecare* care ia naştere în planul de contact.

Prin urmare, *chiar înainte de a începe alunecarea apar forţe de frecare între solide*, numite *forţe de frecare statică* sau de *aderenţă*.

Dacă mărim treptat forţa de tracţiune, fie trăgînd de dinamometru (fig. 3.25, *a*), fie adăugînd etaloane de masă pe platan (fig. 3.25, *b*), constatăm că la un moment dat, pentru o anumită forţă de tracţiune F_s corpul porneşte. Forţa F_s este egală cu *forţa maximă de frecare statică* (de aderenţă). Odată mişcarea începută, dacă menţinem *aceeaşi* forţă de tracţiune F_s, corpul se mişcă *accelerat*. Reducînd însă ulterior, convenabil, forţa de tracţiune, este posibil să se obţină o mişcare *uniformă* a corpului (cu diferite viteze constante), pentru o *anumită* forţă de tracţiune F_c mai mică decît F_s (fig. 3.26). Forţa F_c este egală cu *forţa de frecare la alunecare* (forţă de frecare cinetică). (Cu F_f vom nota forţa de frecare în general.)

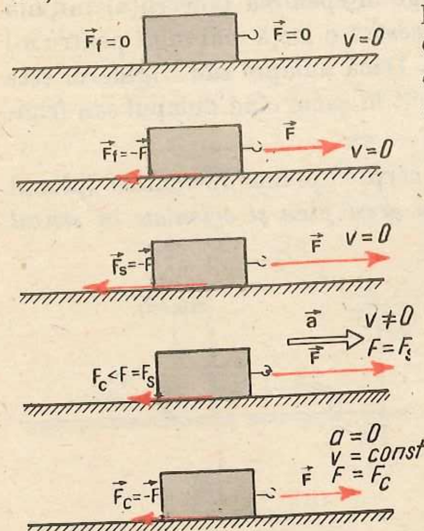


Fig. 3.26. Forţele de frecare statică (aderenţă) şi forţele de frecare la alunecare (cinetice).

Pentru a măsura forţa de frecare de alunecare F_c încărcăm treptat platanul cu mici etaloane de masă şi de fiecare dată ciocănim uşor scîndura pentru a imprima mici impulsuri corpului. Cît timp forţa de tracţiune (tensiunea din fir), egală cu greutatea platanului şi a etaloanelor de masă, este mai mică decît forţa de frecare la alunecare F_c, micile impulsuri imprimate corpului prin ciocănirea scîndurii *se sting* şi corpul nu va aluneca pe scîndură. Dar în momentul

cînd forţa de tracţiune atinge valoarea F_c, corpul *o dată pornit* (prin ciocănirea scîndurii) îşi va menţine mişcarea de alunecare, practic *uniformă*, deoarece forţa de tracţiune va fi echilibrată de forţa de frecare la alunecare.

Aparatul cu ajutorul căruia se studiază legile frecării se numeşte *tribometru*. El este format dintr-o scîndură care poate fi fixată orizontal sau se poate înclina treptat şi care are la un capăt un mic scripete uşor, cu frecări neglijabile. Aparatul mai are trei sau patru corpuri paralelipipedice identice (de obicei din lemn, dar avînd fixate pe feţele laterale plăci din alte materiale: plastic, metal, sticlă), prevăzute cu cîrlige pentru a putea fi cuplate între ele sau legate printr-un fir. Cu acest aparat se lucrează în două variante: ca plan orizontal (fig. 3.25, *b*) şi ca plan înclinat (fig. 3.28). Vom studia mai jos numai forţele de frecare *la alunecare* F_c.

În prima variantă, ca în figura 3.25, măsurăm forţa necesară pentru menţinerea unei mişcări uniforme de alunecare, adică forţa de frecare la *alunecare* F_c (prin ciocănirea uşoară a scîndurii).

Punînd corpul paralelipipedic pe diferite feţe (cu acelaşi material), constatăm experimental că forţele măsurate F_c sînt de fiecare dată *aceleaşi*, deşi corpul se sprijină de fiecare dată cu suprafeţe de *arie diferită*. Mai mult, punînd trei corpuri identice unul *peste* altul sau legîndu-le unul *după* altul (fig. 3.27), pe o faţă sau pe alta (cu acelaşi material), găsim iarăşi aceeaşi forţă de frecare F_c, deşi aria suprafeţei de contact s-a schimbat de fiecare dată, însă greutatea *sistemului* a fost aceeaşi. De aici deducem *prima lege a frecării:*

forţa de frecare la alunecare F_c între două corpuri nu depinde de aria suprafeţei de contact dintre corpuri.

Punînd peste corpul studiat diferite etaloane de masă, constatăm experimental că forţele de frecare cresc şi anume:

forţa de frecare la alunecare F_c este proporţională cu forţa de apăsare n o r m a l ă exercitată pe suprafaţa de contact.

Notînd cu N forţa normală de apăsare pe suprafaţa de contact dintre corpuri (în cazul experienţei descrise N este egal cu greutatea corpului şi a etaloanelor de masă puse peste corp) şi cu μ coeficientul de proporţionalitate putem scrie deci

$$F_c = \mu N. \tag{3.42}$$

Coeficientul μ se numeşte *coeficient de frecare la alunecare*.

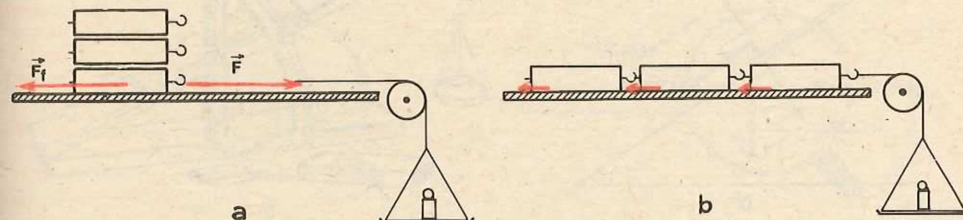


Fig. 3.27. Forţa de frecare la alunecare nu depinde de aria suprafeţei de contact dintre corpuri.

Repetînd experiențele descrise cu alte materiale, constatăm că într-adevăr coeficientul de frecare μ nu depinde de aria suprafeței de contact dintre cele două corpuri (nelubrifiate), dar depinde de natura corpurilor și de felul prelucrării suprafețelor în contact (gradul de șlefuire sau contaminare cu oxizi sau alte substanțe).

De asemenea, experiența arată că μ este practic independent de viteza relativă de alunecare a corpului (scade mai întîi puțin cu creșterea vitezei, ca apoi să crească iarăși, puțin, cu viteza).

Aceleași legi ale frecării se obțin în varianta experimentală cu planul înclinat. Punem corpul pe scîndura tribometrului și înclinăm (ridicînd) *treptat* scîndura pînă cînd la un moment dat, pentru un anumit unghi α de înclinare corpul pornește. În acest moment componenta greutății $G \sin \alpha$ învinge forța maximă de frecare statică (de aderență) F_s (fig. 3.28). O dată corpul pornit, dacă nu micșorăm unghiul, corpul va aluneca în jos accelerat, deoarece forța de frecare cinetică (de alunecare) F_c este mai mică decît cea de frecare statică, $F_c < F_s$. Reluînd experiența dar ciocănind ușor scîndura putem găsi un unghi φ (mai mic decît cel precedent) pentru care corpul o dată pornit va luneca în jos practic *uniform*. În acest caz $G \sin \varphi = F_c$.

Exact ca în experiența cu scîndura orizontală, punînd corpul pe diferite fețe sau combinînd mai multe corpuri identice, găsim că unghiul φ, numit *unghi de frecare*, este de fiecare dată același, adică nu depinde de aria suprafeței de contact (legea I). Punînd peste corp diferite etaloane de masă găsim că forța F_c este proporțională cu apăsarea normală pe planul înclinat, care este $G \cos \varphi$ (legea II). Coeficientul de frecare rezultă imediat din această experiență:

$$\mu = \frac{F_c}{N} = \frac{G \sin \varphi}{G \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi. \qquad (3.43)$$

Coeficientul de frecare la alunecare μ este egal cu tangenta unghiului de frecare φ, care la rîndul lui este egal cu unghiul planului înclinat pentru care corpul lunecă *uniform* pe plan.

Coeficientul de frecare, fiind un raport de forțe, este *adimensional* (număr fără dimensiuni fizice, adică fără unități de măsură).

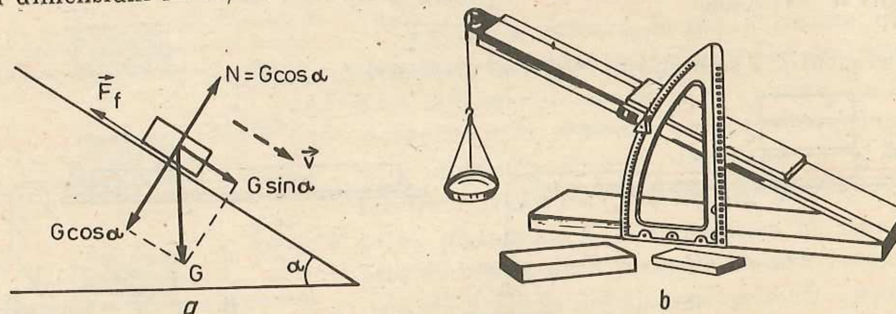


Fig. 3.28. Forța de frecare pe planul înclinat. La echilibru $F_f = G \cdot \sin \alpha$. În cazul alunecării uniforme: $F_c = G \sin \varphi$ și $F_c = \mu N = \mu G \cos \varphi$, de unde $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ (φ — unghiul de frecare).

Exemple de coeficienți de frecare la alunecare

Piele pe metal	0,6	Piele pe fontă	0,28
Cărămidă pe cărămidă	0,5—0,7	Oțel pe oțel	0,17
Lemn pe lemn	0,2—0,6	Lemn pe gheață	0,035
Cauciuc pe șosea asfaltată	0,4—0,6	Oțel pe gheață	0,020
Piele pe lemn	0,40		

Cele două legi ale frecării au fost descoperite experimental de LEONARDO DA VINCI (1452—1519) și redescoperite în 1699 de inginerul francez G. AMONTONS. Ulterior savantul francez CHARLES A. COULOMB (1736—1806) a efectuat multe experiențe asupra frecării și a subliniat deosebirea dintre frecarea statică și cea cinetică. În cinstea lui cele două legi îi poartă numele.

Explicația legilor frecării rezultă din analiza microscopică a suprafețelor în contact. Oricît de șlefuite ar fi suprafețele, ele prezintă nenumărate neregularități sau asperități microscopice. Atunci aria *reală* a contactului este mult mai mică decît aria aparentă macroscopică (poate fi de zece mii de ori mai mică) (fig. 3.29). Această arie reală de contact este proporțională cu apăsarea normală, deoarece vîrfurile neregularităților, dacă sînt supuse la o apăsare sporită, se deformează plastic (presiunea este foarte mare din cauza ariei mici) și aria de contact crește practic proporțional. În cazul alunecării aceste contacte-suduri dintre suprafețe sînt rupte și se formează continuu altele noi.

Prin urmare, forța de frecare este în realitate proporțională cu aria reală a suprafețelor microscopice de contact, care este independentă de aria aparentă macroscopică de contact, dar care este proporțională cu apăsarea normală. Rezultă că forța de frecare este proporțională cu apăsarea normală, dar este independentă de aria aparentă macroscopică de contact.

3.4.3. **Frecarea în natură și în tehnică.** Forțele de frecare la contactul dintre solide apar peste tot în natură și în tehnică. În unele domenii ele sînt utile, chiar indispensabile, iar în alte domenii sînt dăunătoare și trebuie reduse cît mai mult.

Astfel, echilibrul corpurilor pe suprafețe ușor înclinate este posibil numai datorită forțelor de frecare. Însuși mersul oamenilor este posibil datorită forțelor de frecare dintre talpa încălțămintei și teren. La fel mersul vehiculelor este posibil datorită forțelor de frecare dintre periferia roților motoare (antre-

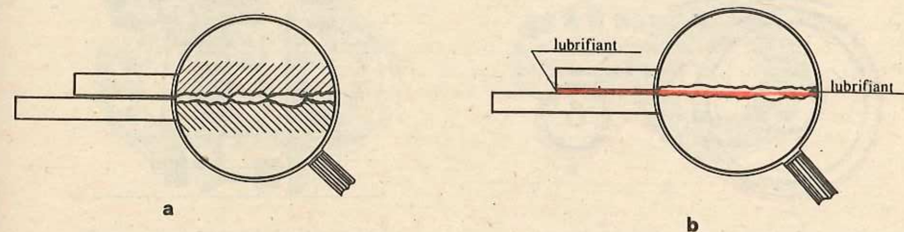


Fig. 3.29. Contactul microscopic între solide și rolul lubrifiantului.

nate de motor) şi teren. Pe gheaţă sau polei mersul este foarte greoi (la vehicule roţile patinează, adică se învîrtesc pe loc).

Trebuie observat că la roţile *motoare* (acţionate de motor) ale vehiculelor, forţa de frecare asupra roţii este orientată *înainte* (roata împinge Pămîntul înapoi şi Pămîntul împinge roata înainte, aşa cum se vede clar în cazul patinării roţii). Această *forţă de frecare* reprezintă tocmai *forţa de tracţiune* dezvoltată de motor. La fel în cazul mersului oamenilor forţa de frecare asupra tălpii acţionează *înainte:* noi împingem Pămîntul înapoi şi Pămîntul ne împinge înainte.

Frînarea vehiculelor este posibilă tot datorită forţelor de frecare (între saboţi şi discul roţii, între roţi şi şosea). Pentru o frînare eficientă a vehiculului nu trebuie să intrăm în regimul de alunecare a roţilor pe şosea, frînînd prea brusc pe teren lunecos sau blocînd roţile, ci să menţinem rostogolirea roţilor în preajma alunecării, cînd forţa de aderenţă este mai mare decît forţa de frecare la alunecare.

Transmiterea mişcării de rotaţie prin curele de transmisie este posibilă datorită forţelor de frecare dintre curea şi periferia roţii (fig. 3.30 şi fig. 3.31).

Legarea nodurilor la sforile pentru ambalarea mărfurilor; ţinerea la mal a unui vas care acostează prin înfăşurarea funiei de amaraj de mai multe ori în jurul bornei cilindrice fixate pe ţărm; ţinerea cu degetele mîini a diferitelor obiecte (creion, unelte) — toate sînt posibile numai datorită forţelor de frecare.

Pe de altă parte forţele de frecare sînt dăunătoare în diferite motoare şi mecanisme, deoarece pentru învingerea lor se consumă energie în plus, în mod inutil, energie care se transformă în căldură, ducînd la încălzirea pieselor în mişcare. Uneori această încălzire poate duce la deformarea pieselor, la griparea lor sau chiar la topirea lor.

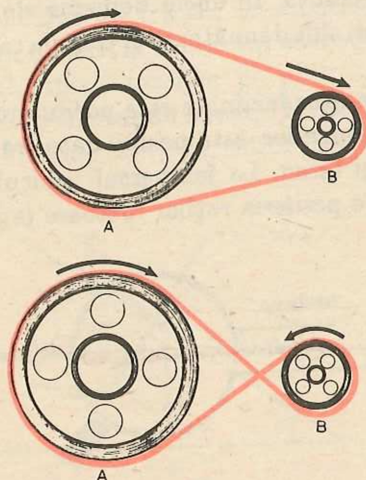


Fig. 3.30. Curele de transmisie.

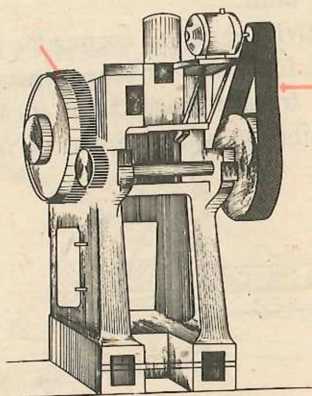


Fig. 3.31. Transmisie prin roţi dinţate şi prin curea.

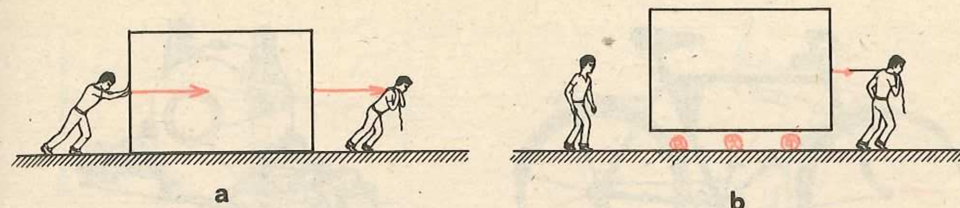


Fig. 3.32. Frecarea la alunecare şi frecarea la rostogolire.

Pentru a micşora forţele de frecare la lunecare se folosesc *lubrifianţi*: uleiuri şi unsori. Acestea formează o peliculă care separă solidele şi duce astfel la lunecarea pe o pătură de lichid, la care forţele de frecare sînt de zeci de ori mai mici.

O altă cale este folosirea *rostogolirii* în locul lunecării. Forţa de frecare care se opune deplasării unui corp care se rostogoleşte peste altul este mult mai mică (de sute de ori) decît forţa de frecare la alunecare. De exemplu, un cilindru (creion rotund) pus de-a lungul unui plan, înclinat uşor, rămîne în repaus, dar pus de-a curmezişul planului (pantei) sigur se va rostogoli, chiar la înclinări mici ale planului.

La rostogolire asperităţile sînt mai degrabă „netezite" sau „călcate", decît rupte ca în cazul lunecării.

Pentru a deplasa un bloc greu se pun sub el butuci de lemn (fig. 3.32) — procedeu cunoscut cu mult înaintea erei noastre, de exemplu în Egiptul antic, la construcţia piramidelor.

Descoperirea roţii a marcat un important progres al omenirii.

Pentru a reduce frecările în lagăre, în care se rotesc arbori sau osii, se folosesc *rulmenţi* cu bile sau cu role (fig. 3.33, 3.34, 3.35) transformînd frecarea de alunecare din lagăre în frecarea de rostogolire a bilelor.

Forţa de frecare la rostogolire se poate măsura în principiu la fel ca şi forţa de frecare la lunecare (cu tribometrul).

Astăzi există vehicule pe *pernă de aer* în care motoare speciale creează o pătură de aer sub vehicul, pe care acesta lunecă. De asemenea, se experimentează vehicule cu suspensie *magnetică* care se deplasează deasupra unor şine speciale, fiind menţinute în suspensie cu ajutorul cîmpului magnetic.

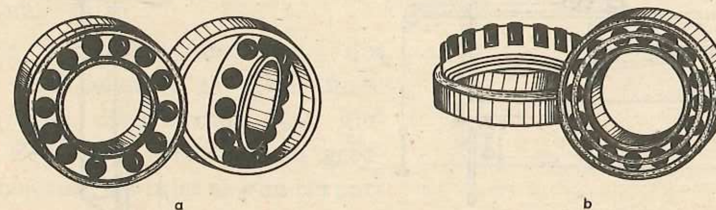


Fig. 3.33. a) Rulmenţi cu bile şi b) rulmenţi cu role.

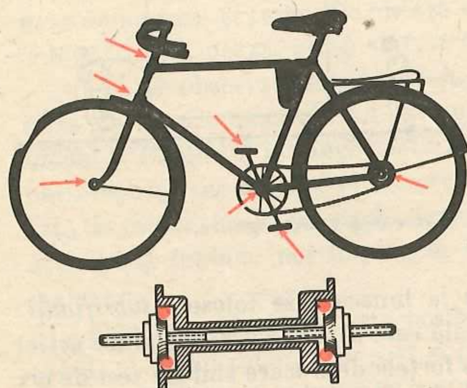


Fig. 3.34. Rulmenţi cu bile la o bicicletă.

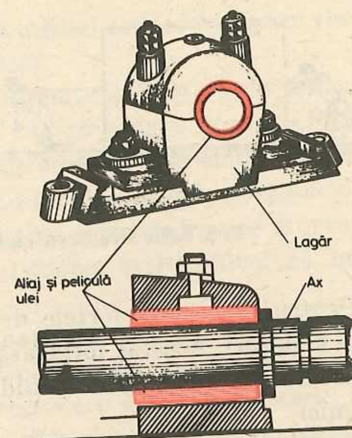


Fig. 3.35. Lagăr de alunecare (fără rulmenţi).

În afară de frecarea între solide, există forţe de frecare între solide şi fluide sau între straturi de fluid. Astfel, orice corp care se mişcă într-un fluid întîmpină din partea acestuia o forţă de rezistenţă, de exemplu la vapoare, submarine, vehicule terestre, avioane, rachete.

EXPERIMENTE

Studiul frecării la alunecare. (Trusă de fizică pentru liceu.) Se analizează frecarea de alunecare dintre cărucior (cu roţile blocate) şi bara de rulare. Pentru aceasta se realizează montajul din figura 3.36 (detalii în fig. 1.29). Se blochează roţile căruciorului (fig. 3.37) pentru a realiza frecarea de alunecare.

a) Metoda planului orizontal. Se încarcă căruciorul cu greutăţi cu şurub de 100 g. Forţa de tracţiune se alege prin încercări astfel încît căruciorul cu roţile blocate să lunece *uniform* după ce a fost pus în mişcare. Atunci forţa de tracţiune F echilibrează forţa de frecare la lunecare F_c şi $\mu = F_c/N = F/G$.

Se fac mai multe determinări pentru încărcări diferite ale căruciorului şi se calculează μ. În limitele erorilor experimentale se obţine acelaşi coeficient μ.

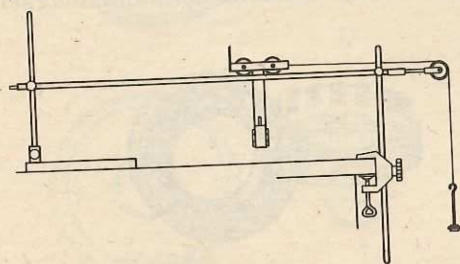


Fig. 3.36. Montaj pentru studiul frecării pe plan orizontal.

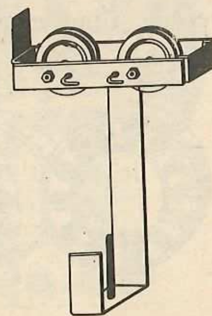


Fig. 3.37. Blocarea roţilor căruciorului.

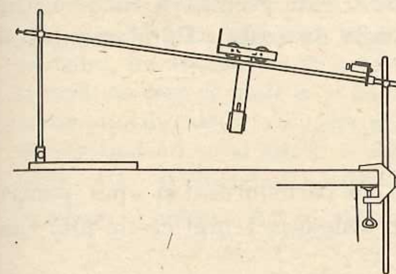


Fig. 3.38. Montaj pentru studiul frecării pe plan înclinat.

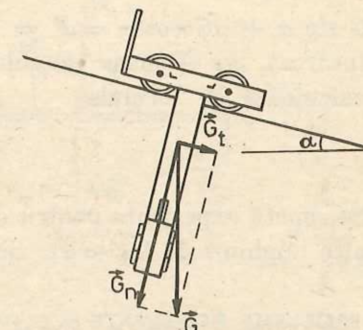


Fig. 3.39. Componentele forţei de greutate (la căruciorul încărcat).

b) Metoda planului înclinat. Se utilizează planul înclinat fără montajul electric (fig. 3.38). Pe acesta se lasă să lunece căruciorul cu roţile blocate. Forţa care pune în mişcare căruciorul este componenta tangenţială a greutăţii acestuia (fig. 3.39). În mişcare *uniformă*, cu unghiul φ al planului, forţa de frecare $F_c = \mu N = \mu G_n = \mu mg \cos\varphi$ este echilibrată de componenta tangenţială $G_t = mg \sin\varphi$ astfel încît $\mu = \mathrm{tg}\,\varphi$ (φ — unghiul de frecare).

Se lasă căruciorul să lunece pe bara de rulare şi se modifică unghiul de înclinare α al acesteia pînă se obţine o mişcare *uniformă* în urma unui impuls. Se măsoară unghiul φ cu raportorul (*17*). Se repetă experienţa de cîteva ori şi se ia media valorilor μ. Se va compara cu valoarea obţinută în varianta precedentă.

2. *Determinarea randamentului planului înclinat.* Pentru a ridica *uniform* un corp pe un plan înclinat de lungime l şi înălţime h, fără frecări, trebuie să efectuăm lucrul mecanic $L_u = G \sin\alpha \cdot l = Gh$, la fel ca pentru ridicarea directă pe verticală. În prezenţa frecărilor: $L_t = (G \sin\alpha + \mu G \cos\alpha) \cdot l > L_u$ deci ridicarea corpului se face cu randamentul

$$\eta = \frac{L_u}{L_t} = \frac{mgh}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{1}{1 + \mu/\mathrm{tg}\,\alpha} < 1.$$

Cu cît unghiul α este mai mare (deci tg α mai mare), cu atît η este mai mare, dar şi forţa necesară este mai mare. La unghiuri α mici randamentul este mai mic dar în schimb şi forţa necesară este mai mică.

Se realizează montajul din figura 3.40 montat ca plan înclinat (roţile căruciorului sînt blocate). Se încarcă căruciorul cu greutăţi cu şurub. Pe taler se pun corpuri cu mase cunoscute M pînă cînd căruciorul se deplasează *uniform în sus* în urma unui impuls. Atunci

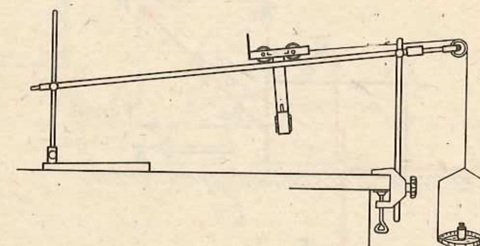


Fig. 3.40. Montaj pentru determinarea randamentului unui plan înclinat.

$G \sin\alpha + \mu G \cos\alpha = F = (m_t + M)g$, unde G este greutatea căruciorului încărcat, m_t — masa talerului, M — etaloanele de masă. Randamentul se calculează cu formula:

$$\eta = \frac{Gh}{Fl} = \frac{m \sin\alpha}{m_t + M}.$$

Se repetă experiența pentru diferite încărcări ale căruciorului și apoi pentru alte unghiuri de înclinare. Se va compara cu valoarea teoretică de mai sus.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp este lansat de-a lungul unui plan orizontal cu viteza inițială $v_0 = 4{,}9$ m/s. Coeficientul de frecare la alunecare între corp și plan este $\mu = 0{,}20$. Să se afle accelerația corpului, timpul pînă la oprire și distanța parcursă.

Rezolvare. Conform figurii 3.41 avem $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F_f} = m\vec{a}$, care proiectată pe cele două axe dă ecuațiile pe componente:

$$-F_f = ma, \quad N - G = 0,$$

dar, deoarece are loc alunecarea, $F_f = F_c = \mu N = \mu G = \mu mg$, atunci

$$-\mu mg = ma, \quad a = -\mu g.$$

Semnul minus arată că accelerația este îndreptată în sensul opus vitezei (mișcare încetinită). Aplicînd formulele cunoscute pentru timpul pînă la oprire și distanța parcursă pînă la oprire într-o mișcare încetinită, obținem:

$$t_m = -\frac{v_0}{a} = -\frac{v_0}{-\mu g} = \frac{v_0}{\mu g} = 2{,}5 \text{ s}; \quad x_m = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{-2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 6{,}1 \text{ m}.$$

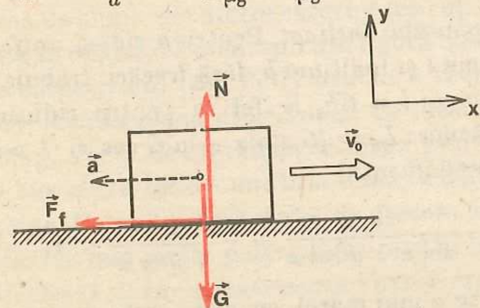


Fig. 3.41. Alunecarea liberă a unui corp pe un plan orizontal cu frecare.

2. Un corp de masă $m = 10{,}0$ kg, așezat pe un plan orizontal, este tras de o forță care formează un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala (fig. 3.42). Să se afle această forță, știind că corpul se mișcă orizontal cu accelerația $a = 1{,}34$ m/s² și coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0{,}27$.

Rezolvare. Conform figurii 3.42 avem $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_f} = m\vec{a}$, care proiectată pe cele două axe dă ecuațiile:

$F \cos\alpha - F_f = ma$; $F \sin\alpha + N - mg = 0$; dar $F_f = F_c = \mu N = \mu(mg - F \sin\alpha)$,

de unde:

$$F = \frac{m(a + \mu g)}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} = 40 \text{ N}.$$

Aici se greșește uneori punînd $F_f = \mu mg$.

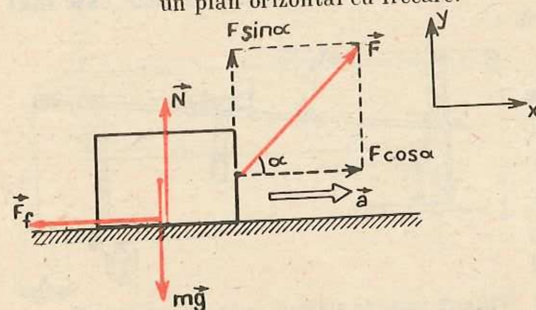


Fig. 3.42. La problema rezolvată 2.

3. Un corp de masă $M = 4{,}0$ kg este așezat pe un plan orizontal. De corp este legat un fir întins orizontal, trecut peste un scripete ideal și avînd la capăt un corp de masă $m = 3{,}0$ kg (fig. 3.43). Coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul M și planul orizontal este $\mu = 0{,}25$. Să se afle accelerația sistemului și tensiunea din fir.

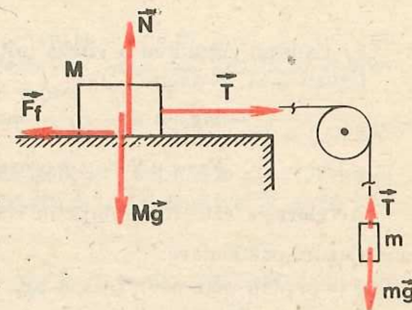


Fig. 3.43. La problema rezolvată 3.

Rezolvare. Conform figurii 3.43 avem:

pentru corpul M: $T - F_f = Ma$,
$N - Mg = 0$;

pentru corpul m: $mg - T = ma$.

Dar în cazul lunecării $F_f = F_c = \mu N = \mu Mg$. Rezolvînd atunci sistemul de ecuații, obținem:

$$a = g\frac{m - \mu M}{m + M} = 2{,}8 \text{ m/s}^2, \quad T = \frac{(1 + \mu)mMg}{m + M} = 21 \text{ N}.$$

4. Să se studieze lunecarea liberă a unui corp pe un plan înclinat *cu frecare*.

Rezolvare. a) *Corpul lunecă liber în jos* (fără viteză inițială). Conform figurii 3.44, *a* avem:

$$mg \sin\alpha - F_f = ma, \qquad N - mg \cos\alpha = 0,$$

dar în cazul lunecării $F_f = F_c = \mu N = \mu mg \cos\alpha$, atunci

$$mg \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha = ma, \qquad a_c = g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha). \tag{3.44}$$

Pentru ca corpul *să lunece* trebuie ca:

$$a > 0, \ \sin\alpha > \mu \cos\alpha \text{ sau } \mu < \operatorname{tg}\alpha \tag{3.45}$$

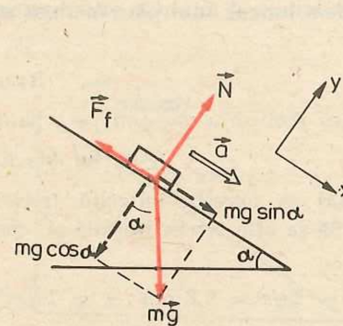
altfel corpul rămîne în repaus pe planul înclinat.

Cazuri particulare:

$\alpha = 0$, plan orizontal, $a = -\mu g$, adică rezultatul cunoscut de la problema rezolvată 1;
$\alpha = 90°$, căderea liberă, $a = g$ (rezultat bine cunoscut).

Cunoscînd accelerația la coborîre a_c (3.44), putem calcula timpul de coborîre și viteza finală:

$$t_c = \sqrt{\frac{2s}{a_c}} = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)}}; \quad v' = \sqrt{2a_c s} = \sqrt{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)s}. \tag{3.46}$$



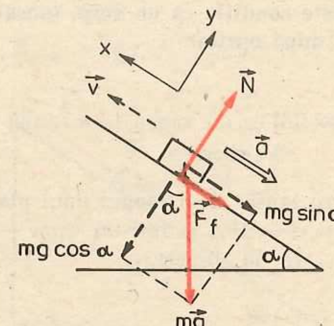


Fig. 3.44. Mișcarea pe plan înclinat cu frecare. La problema rezolvată 4.

b) Lansăm corpul cu o viteză inițială v_0 în sus de-a lungul planului înclinat. Conform figurii 3.44, *b* avem:

$$-mg\sin\alpha - F_f = ma, \qquad N - mg\cos\alpha = 0,$$

$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha, \qquad a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \tag{3.47}$$

Accelerația este îndreptată în sensul opus vitezei (mișcare încetinită).

Cazuri particulare:

$\alpha = 0$, plan orizontal, $a = -\mu g$, rezultat cunoscut;

$\alpha = 90°$, aruncare vertical în sus, $a = -g$, iarăși rezultat cunoscut.

Cunoscînd accelerația de urcare (3.47), putem calcula timpul de urcare și distanța parcursă:

$$t_u = -\frac{v_0}{a_u} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}; \quad s_m = -\frac{v_0^2}{2a_u} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{3.48}$$

După oprire, corpul rămîne în repaus, blocat pe planul înclinat dacă $\mu > \text{tg}\alpha$, și lunecă înapoi dacă $\mu < \text{tg}\,\alpha$ (3.45). În ultimul caz, timpul de coborîre înapoi la baza planului este mai mare decît timpul de urcare, și viteza finală v' cu care corpul ajunge înapoi la baza planului este mai mică decît viteza de lansare v_0:

$$t_c = \sqrt{\frac{2s_m}{a_c}} = \frac{v_0}{g}\,\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}} = t_u\sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} =$$

$$= t_u\sqrt{\frac{\text{tg}\,\alpha + \mu}{\text{tg}\,\alpha - \mu}} > t_u; \tag{3.49}$$

$$v' = \sqrt{2a_c s_m} = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} = v_0\sqrt{\frac{\text{tg}\,\alpha - \mu}{\text{tg}\,\alpha + \mu}} < v_0. \tag{3.50}$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. De ce locomotivele se fac grele din oțel și nu ușoare din aluminiu (sau duraluminiu)?

R: forța de tracțiune este forța de frecare la roțile motoare ($F_{f.max} = \mu G$).

2. Care este condiția ca un corp, lansat în sus de-a lungul unui plan înclinat să rămînă pe loc după oprire?

R: $\mu > \text{tg}\,\alpha$.

3. Este posibil ca un vagon (sau sanie) să coboare rectiliniu *uniform* pe o pantă lină?

R: da (dacă $\alpha = \varphi$).

4. Un corp lansat de-a lungul unui plan orizontal se oprește datorită frecării pe o distanță $d = 19{,}6$ m într-un timp $\tau = 4{,}0$ s. Să se afle viteza inițială și coeficientul de frecare la lunecare.

R: $v_0 = 2d/\tau = 9{,}8$ m/s; $\mu = 2d/g\tau^2 = 0{,}25$.

5. Un tren frînează cu o forță de $n = 10$ ori mai mică decît greutatea sa. Știind viteza inițială $v_0 = 108$ km/h, să se afle timpul pînă la oprire și distanța parcursă.

R: $t_m = nv_0/g = 31$ s; $d = nv_0^2/2g = 460$ m.

6. Un camion cu masa $m = 5{,}0$ t pornește cu accelerația $a = 0{,}61$ m/s². Știind că forțele de frecare (rezistență) reprezintă o fracțiune $f = 0{,}040$ din greutatea camionului, să se afle forța de tracțiune dezvoltată de motor.

R: $F = m(fg + a) = 5{,}0$ kN.

7. Un tren cu masa $m = 1\,000$ t își mărește viteza de la $v_1 = 54$ km/h la $v_2 = 72$ km/h într-un timp $\Delta t = 1$ min 40 s. Știind forța de tracțiune a locomotivei $F = 80$ kN, să se afle forța de rezistență.

R: $F_r = F - m\dfrac{v_2 - v_1}{\Delta t} = 30$ kN.

8. Pentru a evita o ciocnire un șofer a frînat brusc, la maximum. Măsurînd lungimea urmelor lăsate de anvelope pe asfalt s-a găsit lungimea de frînare $s = 22$ m. Știind coeficientul de frecare pe asfalt $\mu = 0{,}60$, să se afle dacă șoferul a respectat viteza maximă legală $v_{max} = 60$ km/h.

R: $v_0 = \sqrt{2\mu g s} = 16{,}1$ m/s $= 58$ km/h.

9. Un corp cade liber în aer de la o înălțime $h = 14{,}7$ m într-un timp $t_c = 2{,}0$ s. Ce fracțiune din greutatea sa reprezintă forța de rezistență *medie* întîmpinată de corp din partea aerului?

R: $F_r/mg = 1 - 2h/gt_c^2 = 0{,}25$.

10. Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ trebuie aplicată o forță minimă în sus de-a lungul planului $F_1 = 3{,}5$ N, iar pentru a-l trage uniform în sus de-a lungul planului trebuie o forță în sus de-a lungul planului $F_2 = 6{,}5$ N.
Să se afle coeficientul de frecare la lunecare (fig. 3.45).

R: $\mu = \dfrac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1}\,\text{tg}\,\alpha = 0{,}17$.

11. O săniuță lunecă pe zăpadă pe un drum înclinat de unghi $\alpha = 45°$ de la o înălțime $h = 2{,}0$ m, după care intră pe un drum orizontal, oprindu-se pînă la urmă datorită frecării pe zăpadă. Coeficientul de frecare la lunecare pe zăpadă $\mu = 0{,}050$. Să se afle distanța parcursă pe planul orizontal.

R: $d = h(1/\mu - \text{ctg}\,\alpha) = 38$ m.

12. O săniuță lansată în sus de-a lungul unui plan înclinat, care formează unghiul $\alpha = 45°$ cu orizontala, revine înapoi la baza planului astfel încît timpul de coborîre este de $n = 1{,}1$ ori mai mare decît timpul de urcare. Care este coeficientul de frecare la lunecare între săniuță și planul înclinat?

R: $\mu = \text{tg}\alpha(n^2 - 1)/(n^2 + 1) = 0{,}095$.

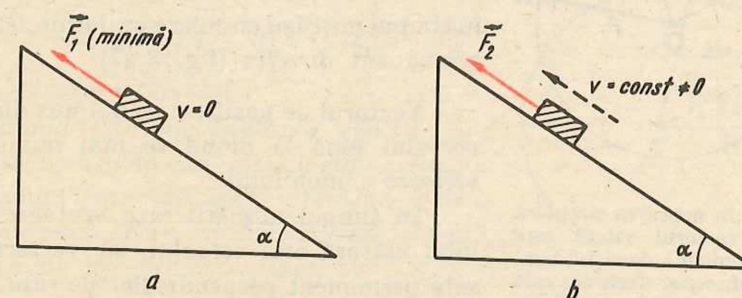


Fig. 3.45. La problema 10.

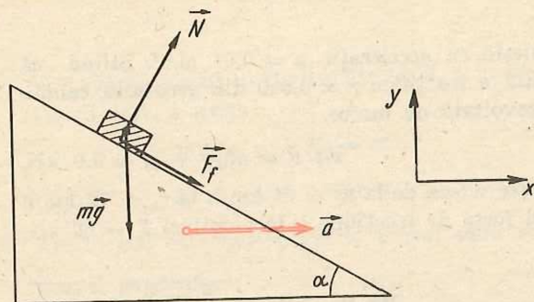


Fig. 3.46. La problema 14.

13. O săniuţă de greutate $G = 0{,}50$ kN lunecă liber în jos pe o pantă $p = 4\%$ cu viteză *constantă*. Ce forţă, paralelă cu planul, este necesară pentru a urca săniuţa înapoi cu viteză constantă?

R: $F \simeq 2Gp = 40$ N.

14. Cu ce acceleraţie orizontală minimă trebuie împins un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ pentru ca un corp aşezat pe el să înceapă să urce pe plan. Coeficientul de frecare dintre corp şi planul înclinat este $\mu = 0{,}20$ (fig. 3.46).

R: $N \sin\alpha + F_f \cos\alpha = ma$, $N\cos\alpha - mg - F_f \sin\alpha = 0$,

$F_f = \mu N$, de unde $a = g\dfrac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3}{2}g$.

3.5. MIŞCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ

Cea mai simplă şi una din cele mai răspîndite şi mai importante mişcări curbilinii este *mişcarea circulară*. În mişcarea circulară traiectoria punctului material este un *cerc*.

În structura diferitelor mecanisme, motoare, maşini-unelte intră tot felul de roţi şi osii ale căror particule descriu cercuri în jurul axei de rotaţie, deci au o mişcare circulară.

Să legăm o piatră de o sfoară şi s-o învîrtim deasupra capului astfel încît să descrie un cerc orizontal. Piatra va avea o mişcare circulară.

Mişcarea circulară este *uniformă* dacă viteza mobilului este *constantă în modul*, adică mobilul descrie arce de cerc egale în intervale de timp egale.

Vectorul viteză, fiind totdeauna tangent la traiectorie, deşi rămîne constant în modul în timpul mişcării circulare uniforme, îşi schimbă permanent *direcţia* (fig. 3.47).

Vectorul de poziţie $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ dus din centrul cercului pînă la mobil se mai numeşte *raza vectoare* a mobilului.

În timpul mişcării raza vectoare a mobilului mătură aria cercului, iar vectorul viteză este permanent perpendicular pe raza vectoare a mobilului (fig. 3.47).

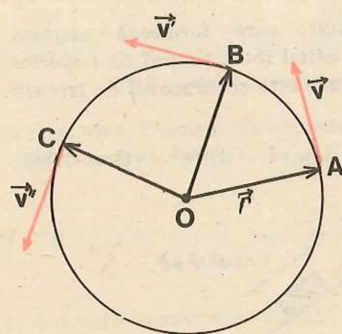


Fig. 3.47. În mişcarea circulară uniformă vectorul viteză este constant în modul, dar îşi schimbă mereu *direcţia*, deoarece este tangent la cerc sau perpendicular pe raza vectoare a mobilului.

Mişcarea circulară uniformă este o mişcare *periodică* deoarece se repetă identic după parcurgerea întregului cerc, la intervale egale de timp.

Perioada mişcării circulare uniforme este intervalul de timp în care mobilul parcurge circumferinţa cercului.

Perioada T se măsoară în secunde.

O caracteristică a mişcării circulare uniforme, folosită mai des în practică, este *turaţia* sau *frecvenţa de rotaţie care reprezintă numărul de rotaţii efectuate în unitatea de timp* (1 s).

Dacă înmulţim durata unei rotaţii, adică perioada T, cu numărul rotaţiilor efectuate în unitatea de timp, adică cu frecvenţa ν, trebuie să obţinem unitatea de timp: $T\nu = 1$, de unde rezultă că frecvenţa şi perioada sînt inverse între ele sau reciproce:

$$T\nu = 1,\ \nu = \frac{1}{T},\ T = \frac{1}{\nu}. \qquad (3.51)$$

Frecvenţa se măsoară în 1/s sau s^{-1}. În practică turaţia (notată de obicei cu n) se măsoară adesea în rot/min (1 rot/s = 60 rot/min).

3.5.1. **Viteza unghiulară.** Poziţia mobilului pe cerc poate fi determinată cu ajutorul coordonatei curbilinii care măsoară lungimea arcului de cerc de la un punct-origine O, considerată pozitivă în sensul trigonometric (antiorar).

Fie la momentul iniţial $t = t_0$ mobilul în $A_0(s_0)$ şi la momentul t mobilul în $A(s)$ (fig. 3.48), atunci mişcarea fiind uniformă pe traiectorie, avem analog mişcării rectilinii uniforme:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \text{const, de unde } s = s_0 + v(t - t_0) \qquad (3.52)$$

(v va fi negativă în cazul mişcării în sens orar).

Fie θ_0 şi θ unghiurile la centru pe care le formează raza vectoare a mobilului cu raza de referinţă CO ($\theta = 0$) la momentele t_0 şi t. Unghiul la centru $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, *măsurat în radiani*, descris de raza vectoare în timpul $\Delta t = t - t_0$ este legat de arcul subîntins $\Delta s = s - s_0$ prin relaţia cunoscută din trigonometrie:

$$\Delta s = s - s_0 = R\Delta\theta = R(\theta - \theta_0), \qquad (3.53)$$

unde R este raza cercului.

Radianul este un unghi la centru care subîntinde un arc de cerc egal cu raza cercului. Cum unghiul total de 360° subîntinde toată lungimea cercului care cuprinde 2π raze, rezultă că unghiul de 360° are 2π radiani, deci

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = 57°17'44'',8. \qquad (3.54)$$

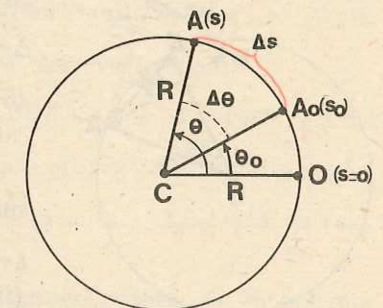


Fig. 3.48. În mişcarea circulară uniformă: $s = s_0 + v(t - t_0)$ şi $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$ (legea mişcării).

În fiecare secundă mobilul descrie arce egale, deci și unghiuri la centru egale. O caracteristică unghiulară a mișcării circulare este viteza unghiulară. *Viteza unghiulară reprezintă unghiul la centru descris de raza vectoare în unitatea de timp.*

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad [\omega] = 1 \text{ rad/s}. \tag{3.55}$$

Viteza unghiulară se măsoară în *radiani pe secundă* (rad/s).

În mișcarea circulară uniformă ω = const. Într-o mișcare circulară oarecare (neuniformă) unghiul la centru măturat de raza vectoare, raportat la unitatea de timp, adică viteza unghiulară (momentană), nu este constant, ci variază în timp.

Vom studia numai mișcarea circulară *uniformă*. Din (3.55) rezultă

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}, \quad \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0). \tag{3.56}$$

Aceasta este legea mișcării circulare *uniforme* exprimată prin mărimi unghiulare (ω va fi negativ dacă mobilul se mișcă în sens orar).

Împărțind relația (3.53) la Δt, avem

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega \rightarrow v = R\omega. \tag{3.57}$$

Aceasta este legătura dintre viteza v (numită și viteză liniară) și viteza unghiulară ω.

În timpul unei perioade T mobilul descrie circumferința cu viteza constantă v, deci

$$vT = 2\pi R, \text{ dar } v = \omega R, \text{ de unde } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{3.58}$$

Aceasta este legătura dintre viteza unghiulară ω (în rad/s) și perioada T (în s) sau frecvența ν (în 1/s).

3.5.2. **Accelerația centripetă.** În mișcarea circulară uniformă $|\vec{v}|$ = const. sau $\Delta v \equiv 0$, dar $\Delta\vec{v} \neq 0$, deoarece *vectorul viteză* $\vec{v}$ *variază ca direcție* și deci *există o accelerație* $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Să calculăm această accelerație.

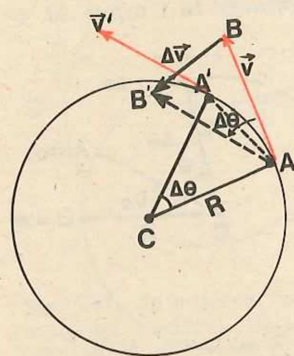


Fig. 3.49. Calculul accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă.

Să considerăm mobilul la două momente succesive t și $t' = t + \Delta t$ în punctele A, A' avînd vitezele $\vec{v}$, respectiv $\vec{v}'$, unde $|\vec{v}'| = |\vec{v}|$ (fig. 3.49).

Diferența $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ se obține după cum știm unind vîrfurile vectorilor $\vec{v}'$, $\vec{v}$ duși din același

punct, de exemplu din A. Triunghiul vitezelor ABB' este asemenea cu triunghiul CAA', ele fiind isoscele și avînd laturile respectiv perpendiculare. Din asemănarea acestora avem

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{AA'} = \frac{v}{R}.$$

Pentru intervale de timp Δt foarte mici punctele A, A' sînt foarte apropiate și coarda AA' coincide (la limită) cu arcul Δs. Atunci

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta s} = \frac{v}{R}, \quad |\Delta\vec{v}| = \frac{v}{R}\Delta s,$$

(pentru Δt și $\Delta s \rightarrow 0$).

Împărțind la Δt corespunzător, rezultă

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Direcția și sensul accelerației sînt date de segmentul BB' care este perpendicular pe AA'. Cînd Δt descrește către zero ($\Delta t \rightarrow 0$) și A' se apropie de A, coarda ia direcția tangentei la cerc în A, iar BB' ia direcția razei cercului. Prin urmare, accelerația este *radială, orientată spre centrul cercului*, de aceea se numește accelerație *centripetă*. Ea este *perpendiculară* permanent pe *traiectorie* (pe tangenta la cerc sau pe vectorul viteză), de aceea se numește și accelerație *normală:*

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R = 4\pi^2\frac{R}{T^2}, \tag{3.59}$$

unde am ținut seama că $v = \omega R$ și $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$. Relația (3.59) se poate scrie și vectorial, folosind raza vectoare $\vec{r}$:

$$\vec{a}_n = -\omega^2\vec{r}. \tag{3.60}$$

Această relație *vectorială* ne dă accelerația centripetă atît ca mărime, cît și ca direcție și sens. Observăm că în mișcarea circulară uniformă $|\vec{a}|$ = const, dar $\vec{a}_n$ variază permanent *ca direcție* (o dată cu raza vectoare $\vec{r}$).

Dacă mișcarea circulară nu este uniformă, adică $|\vec{v}|$ și ω variază, atunci în variația $\Delta\vec{v}$ apare și un termen suplimentar care provine din variația *modulului* vitezei și atunci vectorul accelerație $\vec{a}$ este orientat *oblic* față de raza vectoare (variind ca modul și direcție).

3.5.3. **Forța centripetă.** Pentru a schimba vectorul viteză, fie ca mărime fie ca direcție, este nevoie de o forță aplicată corpului. Altfel, corpul s-ar mișca rectiliniu uniform, conform principiului inerției. În mișcarea circulară *uniformă* accelerația este centripetă (3.59 – 3.60) și conform legii fundamentale

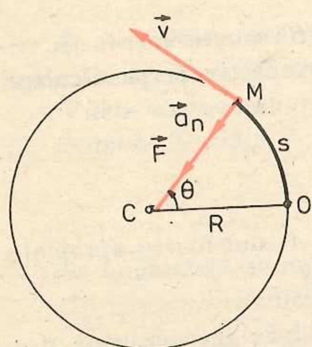


Fig. 3.50. Elementele mișcării circulare uniforme.

$\vec{F} = m\vec{a}$, asupra corpului trebuie să acționeze o *forță centripetă*, care să determine mișcarea *circulară uniformă* (fig. 3.50):

$$F = ma_n = m\omega^2 R = m\omega v = m\frac{v^2}{R},$$

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}. \qquad (3.61)$$

Forța centripetă nu este un nou tip de forță. Ea poate fi forță elastică de tensiune a unui fir legat de corp, forță gravitațională exercitată de corpul central (de exemplu, în sistemul solar), forță electrică exercitată de nucleul atomului asupra electronilor etc.

EXPERIMENT

Descrierea dispozitivului. Pentru a verifica expresia forței centripete (3.61) putem face un experiment simplu. Luăm un tub de sticlă de diametru ≈ 1 cm și de lungime ≈ 10 cm cu marginile răsfrînte la un capăt și un fir de ≈ 80 cm. La un capăt al firului legăm un dop de masă bine cîntărită ($m \approx 2{,}0$ g) iar la celălalt capăt legăm un etalon de masă ($M \approx 20$ g) sau un dinamometru cu un capăt prins de masă (fig. 3.51).

Modul de lucru. 1. Aducem corpul m în mișcare circulară uniformă pe un cerc orizontal. Firul va fi întins de forța $F = Mg$ în varianta din figura 3.51, *a* sau de forța F indicată de dinamometru în varianta din figura 3.51, *b* și va avea o poziție practic orizontală, deci forța centripetă va fi practic chiar F (altfel trebuie calculată componenta orizontală a tensiunii din fir).

2. Alegem trei valori pentru raza R (20 cm; 40 cm și 60 cm) și măsurăm perioada respectivă (cronometrăm timpul a 10—20 rotații).

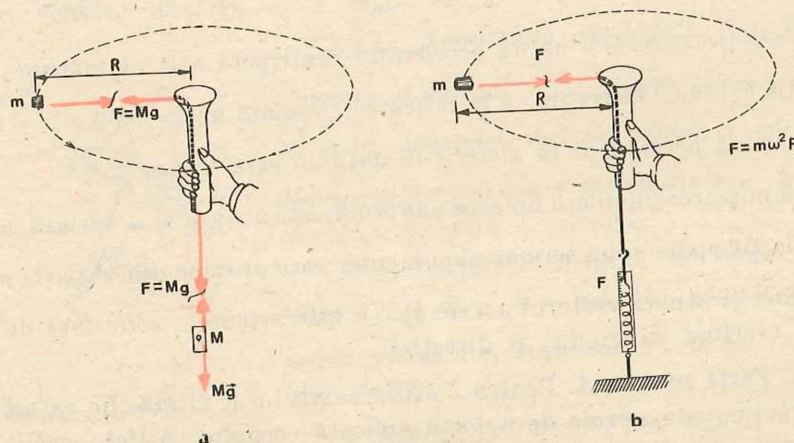


Fig. 3.51. Forța centripetă în mișcarea circulară uniformă.

3. Schimbăm corpul m (luăm un alt dop cu $m \approx 3{,}0$ g) și repetăm experiența.

4. Schimbăm corpul M (luăm $M \approx 30$ g) sau menținem dinamometrul la o altă valoare a forței F și repetăm experiența.

Prelucrarea datelor. Trebuie să verificăm legea

$$F = m\omega^2 R = 4\pi^2 m\frac{R}{T^2}. \qquad (3.62)$$

Alcătuim un tabel ca cel de mai jos:

F sau Mg [N]	m[kg]	R[m]	T[s])	$4\pi^2 mR/T^2$[N]
0,196	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$	0,40	0,41	0,188

Trebuie să comparăm valorile din prima coloană (F) cu cele din ultima coloană ($4\pi^2 mR/T^2$).

Experimentul simplu de mai sus, precum și nenumărate alte experiențe foarte precise și observații asupra mișcării circulare din natură confirmă valabilitatea legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$ în cazul mișcării circulare (în mișcarea circulară *uniformă* $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$).

În mișcările circulare neuniforme, pe lîngă componenta centripetă $F_n = -m\omega^2 r$, care modifică *direcția* vectorului viteză, mai apare și o componentă tangențială a forței ($F_t = mdv/dt$) care modifică *modulul* vectorului viteză.

EXEMPLU

În mișcarea de rotație proprie diurnă a Pămîntului, să se calculeze: viteza unghiulară de rotație a Pămîntului, viteza și accelerația centripetă a unui punct de pe suprafața Pămîntului, aflat la latitudinea $\varphi = 45°$ (fig. 3.52).

Rezolvare. Viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ rad}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

Ea este foarte mică (gîndiți-vă cît de încet trebuie să învîrtiți o minge ca ea să facă o rotație în 24 h). Viteza liniară:

$$v = \omega r = \omega R\cos\varphi = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1} \cdot 6\,380 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \cos 45° = 330 \text{ m/s}$$

și accelerația centripetă:

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 R\cos\varphi = 0{,}024 \text{ m/s}^2,$$

mult mai mică decît g ($a_n \approx g/400$ sau 0,25% din g).

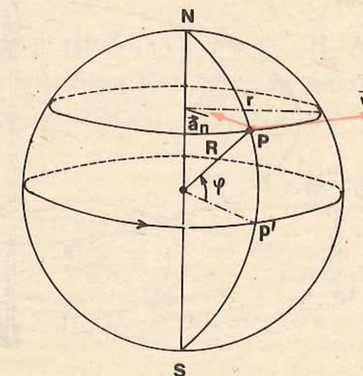


Fig. 3.52. Rotația proprie diurnă a Pămîntului.

3.5.4. **Forța centrifugă. Aplicații.** Principiile mecanicii, așa cum le-am formulat, sînt valabile într-un sistem de referință *inerțial*, de exemplu legat de Soare (sistemul heliocentric) sau de stele și nebuloase sau chiar de *Pămînt* într-o aproximație destul de bună. Într-un astfel de sistem de referință este valabil principiul inerției: un corp (punct material) *izolat*, adică nesupus la nici o forță, se mișcă rectiliniu uniform în virtutea inerției, sau este în repaus.

Dacă însă privim mișcarea dintr-un sistem de referință *neinerțial*, adică accelerat față de stele sau față de Pămînt, atunci un corp izolat apare în mișcare accelerată *față de noi*, fără să putem indica vreo forță — cauză a mișcării accelerate. Invers, într-un sistem de referință neinerțial un corp poate fi în repaus, deși asupra lui acționează o forță rezultantă. De exemplu, fie pe un disc un corp legat de centru printr-un fir cu dinamometru, ambele aflate într-o mișcare de rotație *uniformă* (după atingerea rotației uniforme nu este nevoie de nici o forță tangențială) (fig. 3.53). Pentru observatorul terestru, inerțial, forța de tracțiune centripetă exercitată de resortul dinamometrului obligă corpul să execute mișcarea circulară uniformă. Pentru observatorul situat pe platformă corpul este în repaus (față de acest observator) deși este tras spre centru de forța indicată de dinamometru. Lucrurile se petrec ca și cum asupra corpului ar mai acționa o „forță", centrifugă, egală în modul și opusă ca sens cu forța reală centripetă.

Ori de cîte ori studiem mișcarea unui corp într-un sistem de referință neinerțial, pe lîngă forțele reale $\vec{F}$ trebuie să introducem anumite *forțe complementare* $\vec{F}_c$ pentru a putea scrie și în astfel de repere legea: forța este egală cu masa înmulțită cu accelerația ($\vec{F} + \vec{F}_c = m\vec{a}$).

Forțele complementare nu există pentru un observator inerțial, ele nu satisfac principiul III al mecanicii (al acțiunii și reacțiunii sau al acțiunii reciproce),

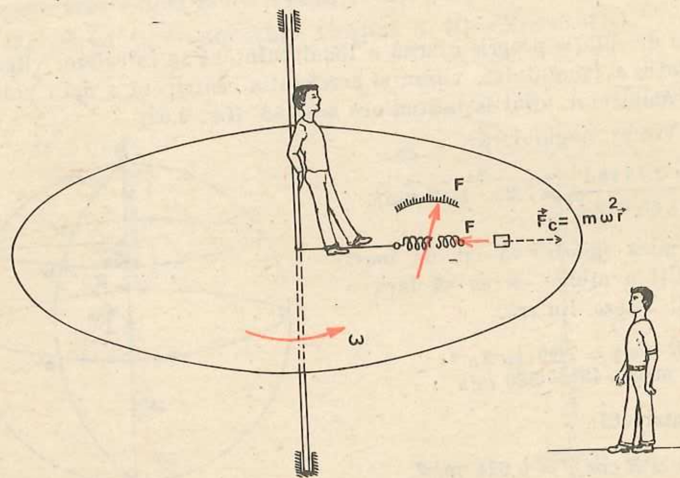


Fig. 3.53. Mișcarea circulară uniformă într-un sistem de referință inerțial și în sistemul de referință propriu.

nu există un corp din mediul înconjurător care să le exercite și asupra căruia să se exercite reacțiunea respectivă, adică ele nu sînt forțe de interacțiune. Forțele complementare se mai numesc pseudoforțe sau *forțe de inerție*. Observăm că Newton a numit *forțe de inerție*, forțele *reale* exercitate de corpul accelerat față de repere inerțiale, *asupra legăturilor*, de exemplu piatra asupra firului și mîinii, Luna asupra Pămîntului.

Pentru observatorul neinerțial forțele complementare se manifestă însă *ca forțe reale* pe care el nu le poate discerne de forțele reale (gravitaționale) cu ajutorul unor *experiențe locale în cadrul restrîns al laboratorului său*, ci numai dacă examinează și *mediul înconjurător*.

În cazul mișcării circulare uniforme a unui corp, pentru observatorul rotit solidar cu corpul, pe lîngă forța centripetă, apare și o forță complementară centrifugă (forța de inerție centrifugă) $\vec{F}_c = + m\omega^2\vec{r}$, care explică repausul relativ al corpului. De multe ori acest punct de vedere este mai sugestiv, deoarece reduce problema dinamică la o problemă de statică, de echilibru între aceste două forțe.

Iată cîteva exemple.

1. Într-un autobuz care virează brusc sîntem azvîrliți în afară de către forța (complementară) centrifugă, care va fi echilibrată de forța centripetă produsă de peretele autobuzului sau de scaun. Pentru observatorul terestru inerțial, nu există această forță centrifugă, podeaua și peretele vehiculului sînt deviate în timp ce noi avem tendința să ne mișcăm în continuare rectiliniu uniform, în virtutea inerției. Forța *centripetă* exercitată de perete ne obligă atunci să ne înscriem în mișcarea circulară a autobuzului.

2. *a*) Pe mașina centrifugă fixăm o tijă orizontală pe care alunecă liber două bile de mase diferite m_1, m_2, legate printr-un fir (fig. 3.54). Dacă punem bilele la egală distanță de axul de rotație și rotim tija, constatăm că bila de masă mai mare m_2 este aruncată la margine, trăgînd după ea și bila de masă mai mică m_1. În adevăr, în reperul legat de tijă asupra bilelor acționează forțele centrifuge $F_1 = m_1\omega^2 R$, $F_2 = m_2\omega^2 R$ în sensuri opuse, dar $F_2 > F_1$ ceea ce explică deplasarea lor.

Dacă aranjăm bilele la distanțe invers proporționale cu masele: $R_1/R_2 = m_2/m_1$ sau $m_1 R_1 = m_2 R_2$, atunci forțele centrifuge sînt egale în modul și de sensuri opuse și bilele rămîn în echilibru relativ la orice turație.

b) O altă experiență se face fixînd la mașina centrifugă un pahar bombat umplut cu mercur și apă colorată (fig. 3.55). În repaus, mercurul se așază la fund și apa deasupra, din cauza forțelor de greutate (mercurul avînd densitate mai mare decît apa).

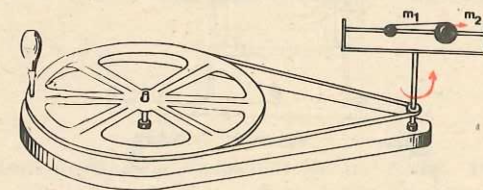


Fig. 3.54. Echilibrul unor bile la mașina centrifugă.

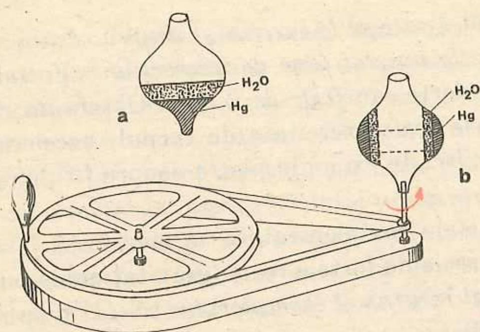


Fig. 3.55. Echilibrul lichidelor la mașina centrifugă.

Punînd în rotație rapidă paharul, constatăm că mercurul urcă și se așază ca un manșon la periferia bombată a paharului, iar apa în stratul următor spre centru. Această stratificare se explică cu ajutorul forțelor centrifuge, care sînt proporționale cu masa (și cu distanța pînă la axă), la fel cum se explică stratificarea în cazul repausului prin forțele de greutate.

c) Să punem pe mașina centrifugă un inel elastic de oțel care poate culisa liber pe axul vertical de rotație (fig. 3.56). Punînd în rotație inelul, el se turtește, datorită forțelor centrifuge care sînt proporționale cu distanța pînă la axa de rotație.

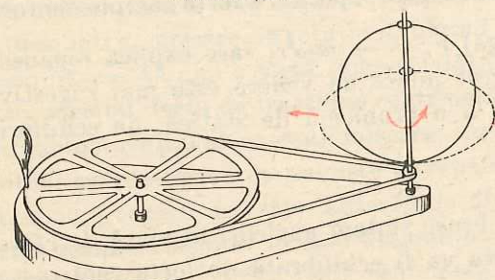


Fig. 3.56. Datorită rotației inelul se turtește.

Un astfel de efect explică turtirea Pămîntului la poli.

3. Pentru a preîntîmpina solicitarea inegală a șinelor și chiar răsturnarea vagoanelor la curbe, calea ferată este supraînălțată la șina exterioară. La viraj forța centripetă este produsă de șine (asupra cărora se exercită acțiunea roților). Forța centrifugă $\vec{F}_c$ se compune cu greutatea $\vec{G}$ pentru a da rezultanta $\vec{R}$. Dacă această rezultantă cade perpendicular pe drum, șinele vor fi egal solicitate (fig. 3.57).

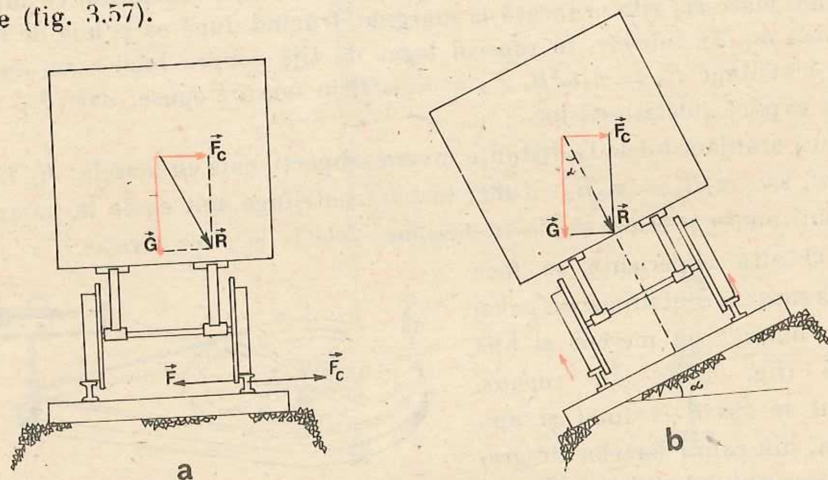


Fig. 3.57. La curbe linia exterioară este supraînălțată pentru a preîntîmpina solicitarea inegală a șinelor și chiar răsturnarea vagoanelor.

Unghiul de înclinare a drumului este dat de

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{gR}. \qquad (3.63)$$

El nu depinde de masa vehiculului, ci de viteza acestuia și de raza de curbură R a drumului.

Analog, la viraje, bicicliștii și motocicliștii se înclină spre centrul de rotație (de curbură) pentru a nu cădea (fig. 3.58):

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{v^2}{gR},$$

adică același rezultat ca pentru înclinarea drumurilor.



Fig. 3.58. La viraje bicicliștii și motocicliștii se înclină spre centrul de curbură pentru a nu cădea.

4. *a*) *Separatorul centrifugal.* Pentru a separa rapid particulele în suspensie într-un lichid, se așază vasele la mașina centrifugă. La turații mari forța centrifugă $F_c = m\omega^2 R$ este foarte mare și împinge particulele cu masă mai mare spre fundul vasului, unde ele se depun (fig. 3.59).

b) *Uscătorul centrifugal.* Separarea lichidelor de solide se face pe baza aceleiași metode. Corpurile sînt așezate într-un vas cilindric perforat fixat într-un vas cilindric mai larg (fig. 3.60). Prin rotirea rapidă a vasului interior, lichidul este împins spre exterior, iese prin orificiile peretelui și se scurge în vasul exterior.

Un astfel de uscător este folosit la mașinile de spălat. Un aparat asemănător servește pentru scoaterea mierii de albine din faguri.

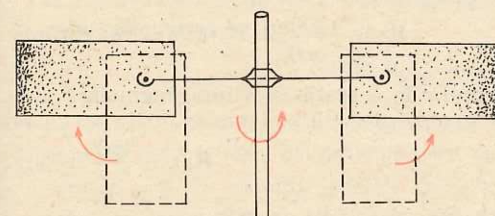


Fig. 3.59. Separatorul centrifugal.

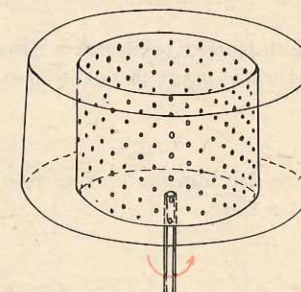


Fig. 3.60. Uscătorul centrifugal.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Pendulul conic. Un corp de dimensiuni neglijabile, suspendat de un punct fix, printr-un fir de lungime $l = 0{,}40$ m, este pus să descrie o circumferință într-un plan orizontal. Firul de suspensie descrie atunci pînza unui con cu deschiderea $2\alpha = 2 \cdot 60°$ (fig. 3.61).

Să se afle perioada de rotaţie.

Rezolvare. Asupra corpului acţionează două forţe: greutatea şi tensiunea din fir. Rezultanta lor trebuie să fie forţa centripetă, egală cu $m\omega^2 r$, deoarece corpul are o mişcare circulară uniformă. Din paralelogramul forţelor se vede că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{4\pi^2 r}{T^2 g},$$

dar $r = l \sin \alpha$, de unde

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 0{,}9 \text{ s.} \qquad (3.64)$$

Dacă considerăm sistemul de referinţă propriu atunci adăugăm forţa centrifugă $\vec{F}_c = +m\omega^2\vec{r}$ şi scriem condiţia de echilibru relativ.

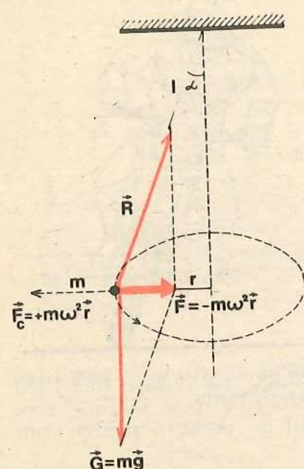


Fig. 3.61. Pendulul conic.

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. Cum trebuie să circule automobiliştii la curbe, dacă vremea este umedă (mîzgă) sau este polei? De ce?

R: cu viteză redusă (pericol de derapaj datorită forţei centrifuge şi aderenţei scăzute).

2. Ce viteză unghiulară şi ce perioadă are o placă de patefon cu turaţia $n = 33$ rot/min?

R: $\omega = 2\pi n = 1{,}1\,\pi \cong 3{,}5$ rad/s; $T = \frac{1}{n} = 1{,}8$ s.

3. Viteza liniară periferică a discurilor de polizor nu trebuie să depăşească $v = 100$ m/s. Ce turaţie maximă poate avea un disc de diametru $D = 20$ cm?

R: $n = \frac{v}{\pi D} = 16$ rot/s $= 960$ rot/min.

4. Să se afle durata a $N = 100$ rotaţii efectuate de o roată cu viteza unghiulară $\omega = 4\,\pi$ rad/s.

R: $t = \frac{2\pi N}{\omega} = 50$ s.

5. Care este perioada de rotaţie şi viteza unghiulară a acelor unui ceasornic?

R: orar $T = 12$ h, $\omega = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ rad/s; minutar $T = 1$ h, $\omega = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ rad/s; secundar $T = 1$ min, $\omega = 0{,}105$ rad/s.

6. Vîrful minutarului unui ceasornic dintr-un turn s-a deplasat cu $\Delta s = 15{,}7$ cm într-un timp $\Delta t = 1$ min. Care este lungimea minutarului?

R: $l = \frac{T\Delta s}{2\pi\Delta t} = 1{,}50$ m.

7. Un automobil se mişcă cu viteza $v = 72$ km/h şi are roţi cu diametrul $D \doteq 60$ cm. Care este turaţia roţilor şi acceleraţia normală a punctelor periferice ale roţilor?

R: $n = v/\pi D = 10{,}6$ rot/s; $a_n = v^2/R = 1\,330$ m/s^2 $= 136 \cdot g$.

8. Cu ce viteză şi în ce sens ar trebui să zboare un avion deasupra Ecuatorului pentru a vedea Soarele staţionar?

R: $v = 2\pi R/T = 460$ m/s spre vest.

9. Care ar trebui să fie durata unei zile şi nopţi pentru ca la Ecuator corpurile să n-aibă greutate (aparentă, ţinînd seama de rotaţia Pămîntului)?

R: $T = 2\pi\sqrt{R/g} = 1$ h 25 min.

10. Un autobuz de masă $m = 10{,}0$ t merge cu viteza $v = 54$ km/h peste un drum (pod) curbat: *a*) convex; *b*) concav, cu raza de curbură $R = 100$ m. Ce apăsare exercită autobuzul asupra drumului în punctul superior, respectiv cel inferior, al drumului?

R: $N = mg \mp mv^2/R = (98 \mp 22{,}5)$ kN.

11. Un corp de masă $m = 5{,}0$ kg (o căldare cu apă), legat de o sfoară de lungime $l = 1{,}00$ m, este rotit într-un plan vertical. Care este frecvenţa minimă de rotaţie pentru ca sfoara să rămînă întinsă (apa să nu curgă)? Care va fi tensiunea în sfoară în acest caz, cînd corpul trece prin punctul inferior?

R: $\nu_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0{,}50$ rot/s; $T = 2mg = 98$ N.

12. Un copil învîrteşte o piatră, cu frecvenţa $\nu = 120$ rot/min într-un plan vertical, legată de un fir de lungime $l = 1{,}0$ m. În ce moment trebuie să lase firul liber pentru ca piatra să zboare vertical în sus? Pînă la ce înălţime se va ridica piatra?

R: cînd piatra este la capătul diametrului orizontal cu viteza în sus;

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2\pi^2 n^2 l^2}{g} = 8{,}0 \text{ m.}$$

13. Cu ce unghi trebuie înclinat drumul la o curbă de rază $R = 100$ m, prevăzut pentru circulaţie cu viteza $v = 54$ km/h ?

R: $\operatorname{tg}\alpha = v^2/Rg = 0{,}23$; $\alpha = 13°$.

14. Un camion face un viraj de rază $R = 100$ m cu viteza $v = 54$ km/h. Care trebuie să fie coeficientul de frecare la alunecare minim dintre anvelope şi şosea pentru ca autocamionul să nu lunece?

R: $\mu_{min} = v^2/Rg = 0{,}23$.

15. La ce distanţă maximă de centru poate fi aşezată o monedă pe un disc de patefon care se roteşte cu turaţia $n = 78$ rot/min pentru ca moneda să nu lunece? Coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}30$.

R: $R_{max} = \mu g/4\pi^2 n^2 = 4{,}4$ cm.

16. Cu ce turaţie minimă trebuie rotit un cilindru de rază $r = 1{,}0$ m în jurul axei sale verticale, pentru ca un corp aşezat pe peretele interior al cilindrului să rămînă în repaus faţă de cilindru (fig. 3.62)? Coeficientul de frecare între corp şi cilindru $\mu = 0{,}25$.

R: $n = (1/2\pi)\sqrt{g/\mu r} = 1{,}0$ rot/s.

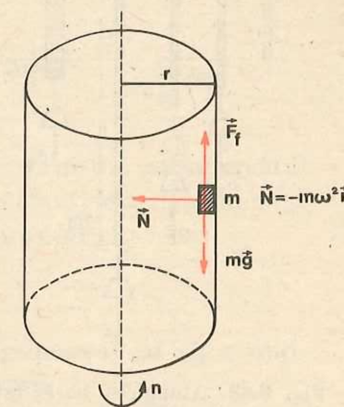


Fig. 3.62. Un corp în echilibru pe o suprafaţă în rotaţie (problema 16).

3.6. FORȚE ELASTICE

3.6.1. Deformări elastice. Legea lui Hooke. Cînd o forță acționează asupra unui corp, atunci acesta își modifică starea de mișcare sau se deformează. Vom analiza cazul cînd forțele produc numai deformări asupra corpului cu care interacționează.

Să tragem de un fir (tijă) dintr-un material oarecare (cauciuc, oțel, plumb, material plastic). Vom observa că firul se alungește, se deformează. Dacă acțiunea forței încetează sînt posibile două situații:

a) deformația nu dispare;

b) deformația dispare.

În primul caz deformările sînt permanente și ele caracterizează materialele numite *plastice*. În această categorie deosebim materiale ca: ceara, plastilina, plumbul, smoala etc.

În al doilea caz deformările sînt *elastice*. Majoritatea corpurilor prezintă această proprietate numită elasticitate. Corpuri perfect elastice nu există, dar dacă forțele care acționează asupra lor nu depășesc anumite limite, atunci deformațiile sînt considerate elastice.

EXPERIMENT

Un fir cilindric (de oțel sau cauciuc) de lungime l_0 și arie S_0 (aria secțiunii transversale), este suspendat vertical la un capăt (fig. 3.63, *a*). De capătul inferior se suspendă discuri identice cu masa cunoscută. Sub acțiunea greutății unui disc lungimea firului devine l (fig. 3.63, *b*). Diferența $l - l_0 = \Delta l$ se numește alungire absolută. Dacă suspendăm de fir două discuri, adică dacă dublăm forța de greutate se constată că și alungirea se dublează (fig. 3.63, *c*). Dacă forța crește de trei, de patru sau de mai multe ori, se constată că și alungirea crește de același număr de ori. Concluzia care se impune este:

alungirea este proporțională cu forța deformatoare $\Delta l \sim F$.

Alegem acum un fir din același material avînd aceeași secțiune dar lungimea inițială dublă $2l_0$. Suspendînd un disc ca în figura 3.63, *d*, se poate observa că în acest caz alungirea este dublă față de cazul din figura 3.63, *b*. Deci:

alungirea este proporțională cu lungimea inițială $\Delta l \sim l_0$.

Fig. 3.63. Alungirea barei este direct proporțională cu forța deformatoare și cu lungimea sa inițială și invers proporțională cu aria secțiunii transversale.

Dacă înlocuim firul cilindric de lungime l_0 cu un altul de aceeași lungime, din același material dar cu aria secțiunii $2S_0$, suspendînd de el un disc vom observa că alungirea lui devine $\Delta l/2$ (fig. 3.63, *e*). Pe această cale se ajunge la concluzia:

alungirea este invers proporțională cu aria secțiunii transversale a materialului solicitat $\Delta l \sim \frac{1}{S_0}$.

Rezultatele obținute pe cale experimentală pot fi puse sub forma:

$$\Delta l \sim \frac{Fl_0}{S_0}.$$

Dacă lungimea inițială l_0, aria secțiunii (transversale) inițiale S_0 și forța F care acționează asupra firului vor rămîne neschimbate, dar vom experimenta cu fire din materiale diferite vom obține alungiri diferite. Deformările depind deci și de *natura materialului* supus solicitării. Aceste constatări experimentale pot fi scrise sub forma:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\cdot\frac{Fl_0}{S_0} \text{ sau } \frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta l}{l_0},\ \sigma = E\varepsilon, \qquad (3.65)$$

unde E este un factor de proporționalitate.

Raportul $F/S_0 = \sigma$, ce reprezintă forța exercitată pe unitatea de suprafață, se numește *tensiune sau efort unitar*; $\Delta l/l_0 = \varepsilon$ reprezintă raportul dintre alungirea absolută și lungimea inițială și se numește *alungire relativă* sau deformație specifică; factorul de proporționalitate E este o constantă de material și se numește *modul de elasticitate longitudinal*, sau modulul lui Young, se măsoară în N/m^2.

Relația (3.65) arată că alungirile relative $\Delta l/l_0$ sînt proporționale cu eforturile unitare F/S_0, pentru un material dat. Această dependență reprezintă *legea lui Hooke* sau legea deformărilor elastice. Legea lui Hooke este o lege empirică, obținută experimental, valabilă pînă la anumite valori ale efortului unitar, valori caracteristice materialului solicitat, motiv pentru care este denumită și lege de material.

Scriind relația (3.65) sub forma

$$F = \frac{ES_0}{l_0}\Delta l$$

și observînd că pentru un sistem fizic (de exemplu: firul din experimentul nostru, un resort etc.) putem pune $ES_0/l_0 = k$ (constant) expresie numită constantă de elasticitate (a firului sau a resortului) avem:

$$F = k\Delta l.$$

Constanta k se măsoară în N/m.

Notînd deformarea elastică (alungirea sau comprimarea) Δl cu x obținem, pentru forța care provoacă deformarea, expresia

$$F = kx. \qquad (3.66)$$

Putem determina pe cale experimentală constanta de elasticitate a unui resort elastic, utilizînd legea deformărilor elastice.

EXPERIMENT

Din trusa de experiențe de mecanică, alegem dinamometrul etalonat pentru măsurarea forțelor pînă la 1 N și fixăm pe marginea lui o hîrtie milimetrică ca în figura 3.64. Pe ea vom măsura alungirile. Dinamometrul se fixează apoi, pe un suport așa cum se arată în figura 3.65, iar de cîrligul său se suspendă cîrligul pentru discuri crestate, cu mase cunoscute. Se introduc pe el diferite discuri și pentru fiecare valoare a masei discului (a greutății) se notează alungirea resortului. Fiecare determinare permite calculul factorului k din relația $F = k\Delta l$, unde $F = G = mg$.

Se înlocuiește dinamometrul de 1 N cu cel de 2,5 N și se repetă determinările. Rezultatele obținute se trec într-un tabel (k_m este valoarea medie pentru k):

	Dinamometru 1N				Dinamometru 2,5 N			
Determinarea	$F = G$ (N)	Δl (m)	k (N/m)	k_m (N/m)	$F = G$ (N)	Δl (m)	k (N/m)	k_m (N/m)
1								
2								

Se obțin valori identice pentru fiecare determinare? De ce? Puteți determina eroarea făcută?

3.6.2. **Forța elastică.** În timpul deformării unui corp, în el apar forțe F_e egale ca valoare cu forțele deformatoare F și orientate în sens opus acestora (fig. 3.66). Deci aceste forțe sînt de forma:

$$F_e = -kx. \qquad (3.67)$$

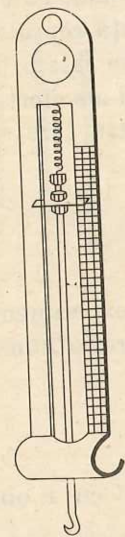


Fig. 3.64. Dinamometru.

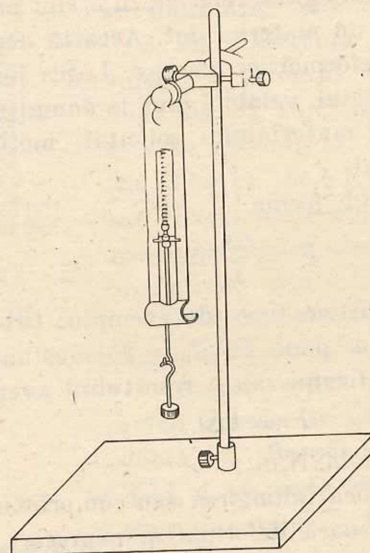


Fig. 3.65. Dispozitiv experimental pentru determinarea constantei elastice.

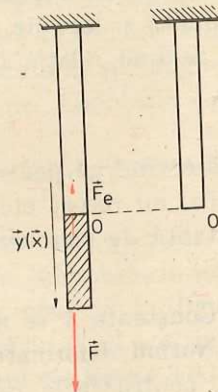


Fig. 3.66. În orice moment, forța elastică este egală cu forța deformatoare și îndreptată în sens opus ei.

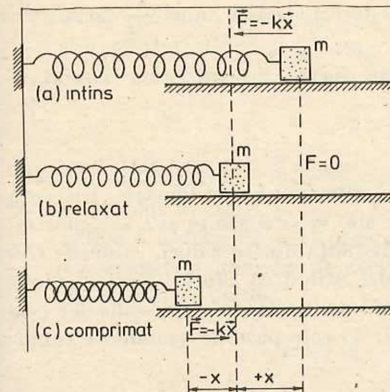


Fig. 3.67. Un resort elastic. Forța exercitată de resort este arătată în fiecare caz. Corpul alunecă pe o masă fără frecări.

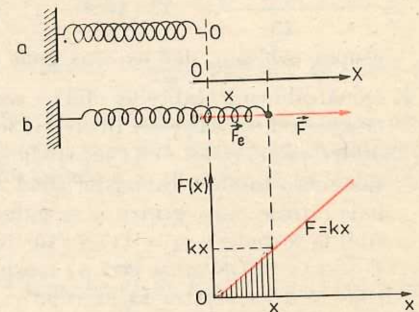


Fig. 3.68. Graficul dependenței de alungire a forței deformatoare, egală și de sens opus cu forța elastică.

Forța F_e, proporțională cu valoarea deformației și orientată în sens opus creșterii deformației, se numește forță elastică.

Forțele elastice sînt forțe interne care apar între regiunile deplasate ale corpurilor solicitate și sub acțiunea cărora ele revin la forma inițială. Un exemplu de forță elastică este forța care apare într-un resort de oțel supus unei deformări (întindere sau comprimare). Figura 3.67 ilustrează forța F care deformează resortul cu $\Delta l = x$ și forța elastică $F_e = -kx$ care apare în resort și care tinde să-l readucă la forma inițială. Figura 3.68 prezintă graficul dependenței de alungire, $\Delta l = x$, a forței deformatoare, egală ca valoare cu forța elastică.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un ascensor cîntărește 980 kg, iar cablul său de acționare, din oțel, are lungimea de 25 m și cîntărește 0,800 kg/m. Pornirea se face uniform accelerat cu accelerația de 1,96 m/s². Efortul unitar admisibil în cablu σ_a este de $117{,}60 \cdot 10^6$ N/m², iar pentru oțel modulul de elasticitate este $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N/m². Se cere : *a)* forța de tracțiune suportată de cablu la pornire; *b)* secțiunea cablului, pentru a nu se depăși efortul unitar admisibil; *c)* alungirea cablului datorită forței de tracțiune la pornire: *d)* forța elastică care apare în cablu, la pornirea ascensorului, dacă secțiunea cablului este cea de la punctul *b*.

Rezolvare. a) Ascensorul și cablul au împreună $m = 980 + 25 \cdot 0{,}8 = 1\,000$ kg. Forța de tracțiune la pornire are valoarea:

$$F = m(g + a) = 1\,000 \cdot 11{,}76 = 11\,760 \text{ N}.$$

b) Din relația $\sigma_a = \frac{F}{S}$ rezultă $S = \frac{F}{\sigma_a} = \frac{11\,760}{11\,760 \cdot 10^4} = 10^{-4}$ m² $= 1$ cm².

c) Din $\Delta l = \frac{Fl}{SE}$ se obține $\Delta l = \frac{11\,760 \cdot 25}{10^{-4} \cdot 19{,}6 \cdot 10^{10}} = 0{,}015$ m $= 1{,}5$ cm.

d) Din $F = -k\Delta l$ unde $k = \frac{SE}{l}$ rezultă valoarea forței elastice $F = \frac{SE}{l}\Delta l = \frac{10^{-4}\cdot 1{,}96\cdot 10^{11}}{25}\cdot 15\cdot 10^{-3} = 11\,760$ N, egală cu forța de tracțiune exercitată asupra cablului, dar de sens opus acesteia.

2. Două cabluri metalice de oțel cu secțiunile egale $S_1 = S_2 = S = 1$ cm² sînt fixate de cîte un zid, iar capetele libere ale lor trebuie prinse împreună în prelungire. Distanța dintre ziduri este $l = 12$ m, iar lungimile cablurilor sînt $l_1 = 6{,}930$ m și $l_2 = 5{,}065$ m. Lungimea totală a cablurilor fiind mai mică decît distanța dintre ziduri, cablurile trebuie întinse bine, pentru a se putea prinde între ele. Știind că efortul unitar admisibil la întindere $\sigma_a = 117{,}6\cdot 10^6$ N/m² și că modulul de elasticitate al cablurilor este $E = 2{,}1\cdot 10^{11}$ N/m² se cer: *a)* tensiunile din cabluri; *b)* este posibilă prinderea cablurilor fără ca acestea să se rupă?

Rezolvare. a) După prinderea capetelor cablurilor tensiunile care apar au aceeași valoare:

$$T_1 = T_2 = T.$$

Suma alungirilor celor două cabluri trebuie să fie egală cu distanța dintre capetele care trebuie unite:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = l - (l_1 + l_2) = 12 - 11{,}995 = 0{,}005 \text{ m}.$$

Dar: $\Delta l_1 = \frac{T_1 l_1}{ES_1} = \frac{Tl_1}{ES}$ și $\Delta l_2 = \frac{T_2 l_2}{ES_2} = \frac{Tl_2}{ES}$.

Avem acum: $\Delta l = \frac{T}{ES}(l_1 + l_2)$ și de aici rezultă:

$$T = \frac{ES\,\Delta l}{l_1 + l_2} = \frac{2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{-3}}{11{,}995} = 8\,753 \text{ N}.$$

b) Eforturile unitare în cabluri sînt:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{T}{S} = \frac{8\,753}{10^{-4}} = 87{,}53\cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Pentru că $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_a$ rezultă că cele două cabluri pot fi întinse fără ca ele să se rupă.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Care este diferența între forța exprimată prin legea lui Hooke și forța elastică?

2. O bară de oțel cilindrică cu lungimea $l_0 = 19{,}8$ m s-a alungit datorită unei forțe de întindere $F = 98$ N cu $\Delta l = 0{,}455$ mm. Să se calculeze raza barei. Se cunoaște modulul de elasticitate al oțelului $E = 1{,}96\cdot 10^{11}$ N/m².

$$\text{R}: R_0 = \sqrt{\frac{Fl_0}{\pi E\,\Delta l}} = 0{,}26\cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

3. Pentru a măsura modulul lui Young, se suspendă un corp cu greutatea $G = 4\,410$ N de un fir de oțel cu lungimea $l_0 = 5$ cm și secțiunea $S_0 = 0{,}0625$ cm²; se găsește că alungirea absolută a firului este $\Delta l = 0{,}18$ mm. Să se calculeze: efortul unitar σ, alungirea relativă ε și modulul de elasticitate E al firului de oțel.

$$\text{R}: \sigma = \frac{G}{S_0} = 7\,056\cdot 10^5 \text{ N/m}^2;\ \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = 0{,}0036;\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 1{,}96\cdot 10^{11} \text{ N/m}^2.$$

4. Să se calculeze alungirea unei bare de oțel de secțiune pătrată și de lungime $l_0 = 20$ m sub efectul propriei greutăți. Densitatea barei este $\rho = 7{,}85\cdot 10^3$ kg/m³ și $E = 2{,}1\cdot 10^{11}$ N/m². Se consideră $g = 10$ m/s².

$$\text{R}: \Delta l = \frac{1}{2E}\cdot \rho g l_0^2 \simeq 7{,}85\cdot 10^{-5} \text{ m}$$

5. Un cablu de oțel are lungimea $l_0 = 20$ m și este format din împletirea a $N = 70$ fire de oțel. Cu cablul de acest profil se ridică un corp cu masa $m = 904$ kg. Știind că alungirea cablului a fost $\Delta l = 15$ mm și $E = 2{,}15\cdot 10^{11}$ N/m², $g = 10$ m/s², să se calculeze:
a) diametrul unui fir de oțel;
b) efortul în cablu.

$$\text{R}: a)\ d_0 = \sqrt{\frac{4\,mgl_0}{N\pi E\,\Delta l}} = 1 \text{ mm};\ b)\ \frac{F}{S_0} = E\cdot\frac{\Delta l}{l_0} = 15\cdot 10^7 \text{ N/m}^2.$$

6. Un corp de masă $m = 510$ kg este deplasat pe un plan orizontal cu ajutorul unui cablu paralel cu direcția planului. Cablul are lungimea l_0, secțiunea $S_0 = 16$ cm² și modulul de elasticitate $E = 2{,}15\cdot 10^{11}$ N/m². Considerînd $g = 10$ m/s² și coeficientul de frecare la alunecare a corpului pe plan $\mu = 0{,}215$, să se calculeze:
a) raportul alungirilor cablului în cazul deplasării uniforme a corpului și în cazul deplasării uniform accelerate cu accelerația $a = 2{,}5$ m/s²;
b) alungirile relative în cele două cazuri de deplasare.

$$\text{R}: a)\ \frac{\Delta l_u}{\Delta l_a} = \frac{\mu g}{a + \mu g} \approx 0{,}46;\ \frac{\Delta l_u}{l_0} = \frac{\mu mg}{S_0 E} \approx 3\cdot 10^{-6};\ b)\ \frac{\Delta l_a}{l_0} = \frac{m(a + \mu g)}{S_0 E} \approx 6{,}8\cdot 10^{-6}.$$

3.7. LEGEA ATRACȚIEI UNIVERSALE A LUI NEWTON. CÎMPUL GRAVITAȚIONAL

3.7.1. Legea atracției universale a lui Newton. Proprietatea unui corp de a cădea către Pămînt, greutatea sa, a fost privită ca o proprietate inerentă tuturor corpurilor pînă în secolul al XVII-lea. Newton este acela care a afirmat că greutatea unui corp trebuie privită ca o forță de atracție dintre Pămînt și acel corp.

Mișcarea corpurilor cerești, în particular cea a planetelor și a Soarelui, era pe vremea lui Newton un subiect de mare interes. Legile mișcărilor acestor corpuri erau considerate ca fiind cu totul diferite de cele ale mișcării corpurilor de pe Pămînt. Newton a considerat că aceeași forță a gravitației care atrage un corp (de exemplu un măr) către Pămînt, ar putea atrage de asemenea și Luna către Pămînt, altfel ea s-ar mișca pe o traiectorie rectilinie și nu pe una (aproape) circulară.

Datorită acestei forțe de atracție apare o accelerație centripetă care poate fi calculată știind perioada de revoluție de $T = 28$ zile și raza orbitei pe care se mișcă Luna în jurul Pămîntului, $R_{PL} = 380\,000$ km. Din expresia accelerației centripete se obține

$$a_L = 4\pi^2\frac{R_{PL}}{T^2} = 2{,}7\cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

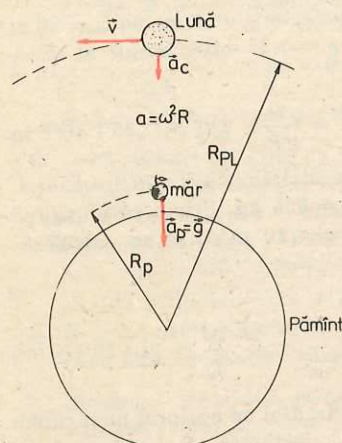


Fig. 3.69. Luna și un corp de la suprafața Pămîntului sînt atrase spre centrul Pămîntului.

Această valoare, $a_L = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ m/s², este de aproximativ 3 600 ori mai mică decît g, adică

$$a_L = \frac{g}{3\,600} = \frac{9{,}8}{3\,600} \text{ m/s}^2.$$

Newton a explicat această diferență, bazîndu-se pe ideea că accelerația unui corp în cădere este invers proporțională cu pătratul distanței sale pînă la Pămînt, $1/R^2$. Considerînd masa Pămîntului concentrată în centrul său, un corp care cade la suprafața Pămîntului se află la o distanță de o rază terestră, $R_P \approx$ $\approx$ 6 400 km de centrul efectiv de atracție. Dar Luna se află la aproximativ 380 000 km distanță (R_{PL}) de Pămînt. Pătratul raportului acestor distanțe

$$\left(\frac{R_P}{R_{PL}}\right)^2 = \frac{(6\,400)^2}{(380\,000)^2} = \frac{1}{3\,600}$$

este în concordanță cu raportul a_L/g.

Forțele exercitate asupra Lunii și asupra corpului de la suprafața Pămîntului depind de masa Lunii și respectiv de masa corpului precum și de masa Pămîntului. Așadar Newton a presupus că forța de atracție gravitațională depinde atît de masele corpurilor care se atrag cît și de inversul pătratului distanței dintre ele. Mai mult, el a considerat că toate corpurile din Univers, indiferent unde s-ar afla ele, exercită o forță de atracție gravitațională (fig. 3.69) unele asupra altora.

Forța gravitațională dintre două corpuri cu masele m_1 și m_2 considerate punctiforme față de distanța dintre ele, situate la o distanță r unul față de altul, este o forță de atracție care acționează de-a lungul liniei ce unește corpurile și are valoarea:

$$F = K\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.68}$$

unde K este o constantă universală avînd aceeași valoare pentru orice pereche de corpuri din Univers.

Relația (3.68) exprimă *legea atracției universale.*

O b s e r v a ț i i. Forțele gravitaționale dintre două corpuri constituie o pereche acțiune-reacțiune. Corpul de masă m_1 exercită, asupra corpului de masă m_2, o forță $\vec{F}_{12}$, avînd direcția dată de dreapta care unește cele două corpuri și sensul așa cum se arată în figura 3.70. La rîndul său corpul de masă m_2 exercită, asupra corpului de masă m_1, o forță $\vec{F}_{21}$ egală în valoare cu $\vec{F}_{12}$, avînd aceeași direcție cu aceasta dar sensul opus.

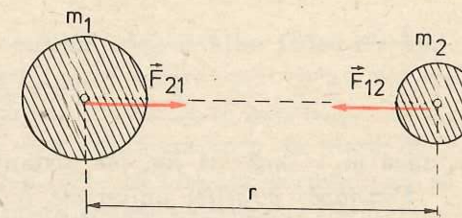


Fig. 3.70. Forțele gravitaționale dintre două corpuri sînt forțe de atracție și constituie o pereche acțiune-reacțiune.

Relația (3.68) exprimă valoarea forței de atracție gravitațională dintre două corpuri punctiforme. Pentru corpuri ca Pămîntul, Luna, Soarele etc. se va presupune că întreaga masă este concentrată în centrele lor de masă.

Legea atracției universale implică ideea că forța gravitațională dintre două corpuri este independentă de prezența altor corpuri sau de proprietățile spațiului dintre ele.

Constanta K poate fi determinată pe cale experimentală. Pentru aceasta trebuie măsurată forța de atracție dintre două corpuri de mase cunoscute. Prima măsurătoare de acest fel a fost făcută de Cavendish în 1798. Astăzi, pentru constanta atracției universale, este acceptată valoarea $K = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Constanta K a fost determinată cu ajutorul balanței de torsiune care este reprezentată în figura 3.71.

De capetele unei tije rigide și ușoare de lungime l sînt fixate două sfere mici, fiecare de masă m(50 g). Tija prevăzută cu cele două sfere este suspendată, printr-un fir vertical foarte fin din cuarț, astfel încît axa ei să fie orizontală. Două sfere mari, fiecare de masă M(50 kg) sînt situate în vecinătatea capetelor tijei și determină, datorită atracției gravitaționale, răsucirea firului de cuarț. Măsurînd pe scală unghiul cu care s-a răsucit firul, se poate calcula valoarea forței de atracție dintre sfere, pentru că această forță este proporțională cu unghiul de răsucire a firului, Fl = constantă · α.

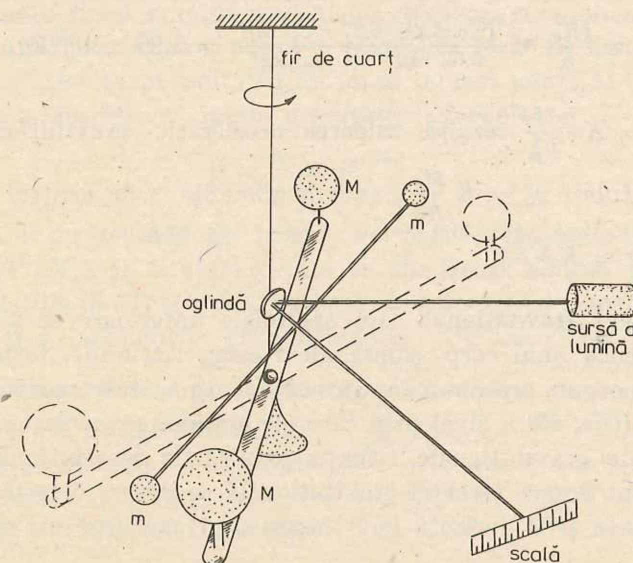


Fig. 3.71. Balanța lui Cavendish folosită pentru determinarea constantei K.

Din:

$$F = K\frac{m_1m_2}{r^2} \text{ rezultă } K = \frac{Fr^2}{m_1m_2}$$

și dacă $m_1 = m_2 = 1$ kg, iar distanța $r = 1$ m se obține $K = F$. Adică:

Constanta atracției universale K este numeric egală cu forța, exprimată în newtoni, care se exercită între două corpuri punctiforme avînd fiecare masa de 1 kg și fiind situate la distanța de 1 metru.

Rezultă că două corpuri punctiforme, cu masa de un kilogram fiecare, aflate la un metru depărtare unul de altul se atrag cu o forță egală cu $6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N ceea ce reprezintă aproximativ $\frac{1}{15} \cdot 10^{-9}$ N! Acum se poate înțelege de ce forța de atracție dintre două corpuri aflate la suprafața Pămîntului nu poate fi observată direct. În timp ce două corpuri cu masa de cîte un kilogram fiecare, aflate la un metru depărtare unul de altul, se atrag cu o forță de $F = \frac{1}{15} \cdot 10^{-9}$ N, fiecare dintre ele este atras de Pămînt cu o forță de $F' = 9{,}8$ N, deci o forță de $147 \cdot 10^9$ ori mai mare decît F.

Forța gravitațională mare pe care Pămîntul o exercită asupra tuturor corpurilor de la suprafața sa se datorește masei foarte mari a Pămîntului. Știind valoarea lui K putem determina masa Pămîntului. Să considerăm Pămîntul de masă M_P și un corp de pe suprafața sa cu masa m. Forța de atracție gravitațională este dată atît de legea a II-a a dinamicii $F = mg$ cît și de relația $F = K\frac{mM_P}{R_P^2}$, de unde rezultă:

$$M_P = \frac{gR_P^2}{K} = \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Din $mg_0 = K\frac{mM_P}{R_P^2}$ rezultă valoarea accelerației gravitaționale la suprafața Pămîntului, $g_0 = K\frac{M_P}{R_P^2}$, care la distanța r de centrul Pămîntului are valoarea $g = K\frac{M_P}{r^2}$. (3.69)

3.7.2. **Cîmpul gravitațional.** Din capitolele anterioare se știe că forță înseamnă acțiunea unui corp asupra altui corp. Acțiunile, forțele, care se exercită între corpuri presupun fie un contact direct între corpuri, fie legături materiale (tije, sfori, șine) prin care ele acționează unele asupra altora. În cazul atracției gravitaționale, situația pare să fie deosebită. De aceea s-a vorbit la început despre atracția gravitațională ca despre o forță care acționează instantaneu și la distanță fără intermediul unei legături materiale între corpuri.

Cel care a formulat ideea că în cazul gravitației este vorba de un efect care se transmite din aproape în aproape, de la un punct din spațiu la altul, a fost Faraday.

Astăzi se consideră că orice corp modifică proprietățile fizice ale spațiului înconjurător, în așa fel încît în acest spațiu asupra unui corp care are caracteristica particulară masă, masă grea sau gravifică, se exercită o forță. Cu alte cuvinte, regiunea din spațiu în care există un corp de masă dată este purtătoarea unei proprietăți fizice noi, care în absența corpului nu se manifestă. În această regiune se manifestă un sistem fizic numit *cîmp gravitațional sau cîmp gravific.*

Cîmpul gravitațional, formă de existență a materiei distinctă de substanță, face posibilă transmiterea din aproape în aproape a atracției dintre corpuri. Legea atracției universale ne arată că orice corp trebuie privit ca o sursă, un izvor, de cîmp gravitațional.

De exemplu, fie Pămîntul o sursă de cîmp gravitațional izolată de alte surse (Lună, Soare, planete). Dacă în vecinătatea Pămîntului este adus un corp de masă $m \ll M_P$, denumit corp de probă, atunci asupra lui se va exercita o forță de atracție F pe direcția razei Pămîntului (presupus sferic) care trece prin acel punct (fig. 3.72). Valoarea acestei forțe este:

$$F = K\frac{mM_P}{r^2},$$

unde r este distanța dintre centrul Pămîntului și corpul de probă, M_P masa Pămîntului, m masa corpului de probă.

Raportul

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{\Gamma}, \qquad (3.70)$$

definește mărimea fizică numită *intensitatea cîmpului gravitațional* produs de sursa gravifică Pămînt în acel punct și semnifică forța de atracție gravitațională care se exercită pe unitatea de masă în acel punct al cîmpului. Din definiția dată intensității cîmpului gravitațional rezultă

$$\Gamma = \frac{F}{m} = K\frac{M_P}{r^2}. \qquad (3.70')$$

Deci mărimea Γ nu depinde de corpul de probă, ea depinde numai de sursa gravifică (M_P) și locul (r) în care se analizează cîmpul gravitațional. Comparînd relațiile (3.69) și (3.70') se poate constata egalitatea între valorile mărimilor Γ și g (accelerația gravitațională). De asemenea din (3.70) se observă că mărimea $\vec{\Gamma}$ este o mărime vectorială.

Din faptul că intensitatea cîmpului gravitațional este o mărime vectorială, rezultă că putem descrie sistemul cîmp gravitațional cu ajutorul unei mulțimi de vectori $\vec{\Gamma}$ atașați punctelor din jurul sursei gravitaționale unde aceasta își manifestă

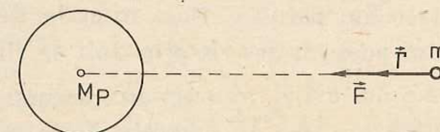


Fig. 3.72. Forța ($\vec{F}$) de atracție exercitată de Pămînt asupra unui corp de probă și intensitatea ($\vec{\Gamma}$) a cîmpului gravitațional.

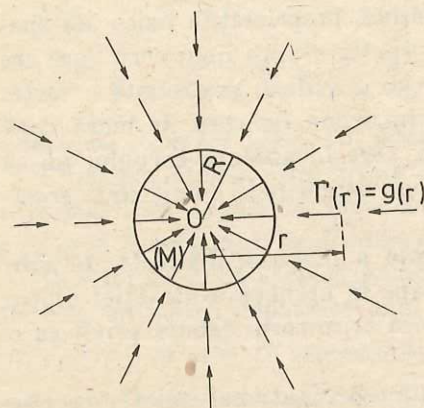


Fig. 3.73. Un cîmp gravitațional radial, generat de un corp sferic omogen și vectorii intensitate atașați acestui cîmp.

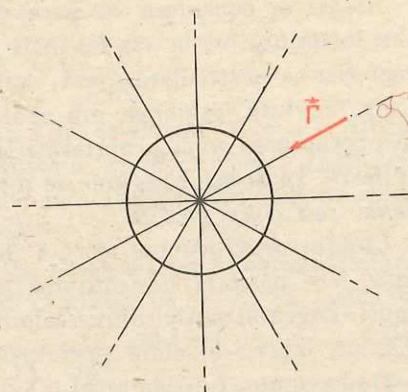


Fig. 3.74. Reprezentarea unui cîmp gravitațional prin linii de cîmp.

prezența (fig. 3.73). Deoarece acestui cîmp fizic i se poate asocia un cîmp de vectori se spune că el este un *cîmp vectorial.* Cîmpul gravitațional produs de o distribuție statică dată a masei unui corp este și un exemplu de *cîmp staționar*, deoarece valoarea intensității cîmpului într-un punct dat nu variază în timp.

Cîmpul gravitațional, ca orice cîmp fizic de altfel, poate fi reprezentat și prin linii de cîmp. Liniile de cîmp sînt linii a căror tangentă coincide în fiecare punct cu direcția vectorului intensitate a cîmpului respectiv. Pentru un corp sferic omogen liniile de cîmp arată ca în figura 3.74 și ele coincid cu direcțiile razelor care pornesc din centrul sursei de cîmp; un astfel de cîmp este un *cîmp radial sau central.*

Măsurători efectuate la distanțe mari (de ordinul $10^2 - 10^4$ km), cu ajutorul sateliților artificiali, au dus la concluzia că în cazul Pămîntului, cîmpul său gravitațional este un cîmp radial.

Dacă este investigat, cercetat, cîmpul gravitațional al Pămîntului în imediata sa vecinătate, în regiuni de mică întindere, de exemplu într-o sală de clasă sau de laborator, atunci se poate constata că în puncte diferite ale spațiului investigat $\vec{\Gamma}$ are aceeași valoare, iar direcțiile vectorilor intensitate sînt paralele. Deci, în astfel de regiuni cîmpul gravitațional al Pămîntului poate fi descris prin linii de cîmp paralele și echidistante, intensitatea cîmpului avînd aproximativ aceeași valoare în toate punctele (fig. 3.75). Un astfel de cîmp se numește *cîmp uniform.*

În cazul unui sistem de surse gravifice, intensitatea cîmpului într-un punct este suma vectorială a intensităților cîmpurilor gravitaționale produse de fiecare sursă în punctul considerat (fig. 3.76).

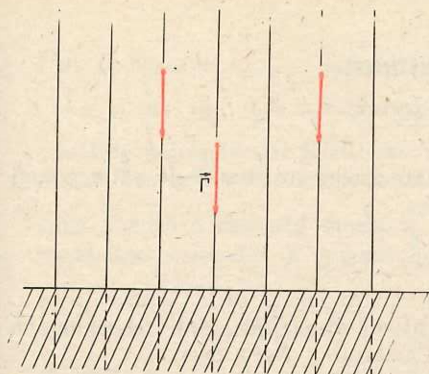


Fig. 3.75. Cîmp gravitațional uniform.

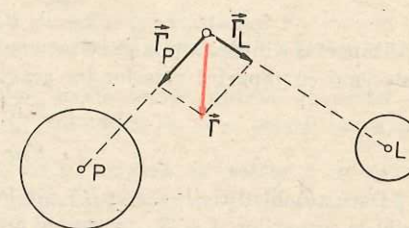


Fig. 3.76. Intensitatea cîmpului gravitațional produs de două corpuri (două surse gravifice) este suma vectorială a intensităților cîmpurilor gravifice produse de fiecare corp (sursă) în parte.

3.8. MASA GRAVIFICĂ. RELAȚIA DINTRE MASA GRAVIFICĂ ȘI MASA INERȚIALĂ. SATELIȚII ARTIFICIALI

3.8.1. Masa gravifică. Relația dintre masa gravifică și masa inerțială. În capitolul II paragraful 2.3.1 s-a arătat că în ecuația (2.5), $\vec{F} = m\vec{a}$, masa apare în calitate de măsură a inerției corpului. Într-adevăr dacă încercăm să împingem un corp aflat în repaus pe o suprafață orizontală, fără frecări, constatăm că este necesară o anumită forță pentru a-l pune în mișcare. Aici se manifestă inerția corpului, gravitația nu se manifestă. Experimentul se poate face și într-un spațiu lipsit de gravitație (stare de imponderabilitate). În acest caz pentru accelerarea corpului ar fi necesară aceeași forță $\vec{F} = m\vec{a}$, deci masa m este masă inertă.

În cele ce urmează vom arăta că există situații diferite de cea anterioară în care de asemenea este implicată masa corpului. De exemplu, pentru a ține un corp în repaus deasupra Pămîntului este necesară o forță, în caz contrar lăsat liber corpul cade spre Pămînt într-o mișcare accelerată. Forța care ține corpul este egală ca valoare cu forța de atracție gravitațională dintre el și Pămînt. În această situație inerția nu joacă nici un rol; aici este importantă proprietatea corpurilor materiale de a fi atrase de alte corpuri, cum ar fi Pămîntul. Forța de atracție gravitațională este:

$$F = K\frac{m_g M_P}{R_P^2},$$

unde m_g este masa gravitațională, masa grea a corpului.

Sînt masele m_g (masa gravitațională) și m (masa inertă) ale aceluiași corp identice?

Fie două corpuri A și B, de mici dimensiuni, cu masele gravitaționale m_{gA} și m_{gB} asupra cărora acționează un al treilea corp C cu masa gravitațională m_{gC}. Fie corpul C la egală distanță r de celelalte două (fig. 3.77). Forța gravitațională exercitată asupra lui A de către C este,

$$F_{AC} = K\frac{m_{gA}\, m_{gC}}{r^2},$$

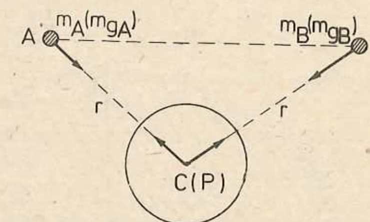


Fig. 3.77. Forțele exercitate de un corp C asupra a două corpuri A și B aflate la egală distanță de C.

forța gravitațională cu care C acționează asupra lui B este:

$$F_{BC} = K\frac{m_{gB}\, m_{gC}}{r^2}.$$

Raportul dintre forțele gravitaționale exercitate asupra lui A și B de către corpul C este egal cu raportul maselor lor gravitaționale:

$$\frac{F_{AC}}{F_{BC}} = \frac{m_{gA}}{m_{gB}}.$$

Dacă cel de-al treilea corp C este Pămîntul, atunci F_{AC} și F_{BC} sînt ceea ce numim greutățile corpurilor A și B, în cîmpul gravific al Pămîntului. Avem deci:

$$\frac{G_A}{G_B} = \frac{m_{gA}}{m_{gB}}.$$

Așadar legea atracției universale implică faptul ca greutățile diferitelor corpuri, în același loc pe suprafața Pămîntului sînt exact proporționale cu masele lor gravitaționale.

Să măsurăm masele inerte m_A și m_B ale corpurilor A și B pe o cale oarecare (de exemplu prin metoda ciocnirilor). Să lăsăm apoi aceste corpuri să cadă spre Pămînt dintr-un anumit loc și să măsurăm accelerațiile mișcărilor lor. Se află experimental, că obiecte, corpuri, cu mase inerțiale diferite cad cu aceeași accelerație g datorită atracției gravitaționale terestre. Dar forțele de atracție gravitaționale exercitate asupra corpurilor reprezintă chiar greutățile lor, astfel încît din legea a doua a dinamicii obținem:

$$G_A = m_A \cdot g \text{ și } G_B = m_B \cdot g$$

sau

$$\frac{G_A}{G_B} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Deci greutățile corpurilor în același loc de pe Pămînt sînt de asemenea exact proporționale cu masele lor inerte.

Așadar masa inertă și masa gravitațională sînt cel puțin proporționale între ele. Astăzi se consideră că masa inerțială este echivalentă cu masa gravitațională.

În anul 1909 Eötvös a construit un aparat care putea detecta o diferență de $5 \cdot 10^{-9}$ în valoarea forței gravitaționale. El a aflat că masele inerte egale suferă totdeauna forțe gravitaționale egale în limitele preciziei aparatului său.

În fizica clasică, newtoniană, echivalența dintre masa gravitațională și masa inertă a fost considerată ca o coincidență remarcabilă fără vreo semnificație mai adîncă. În fizica modernă, însă, echivalența masei grele și a masei inerțiale este considerată un fapt fundamental care duce la o înțelegere mai profundă a gravitației.

3.8.2. **Sateliții artificiali.** Să considerăm un punct A situat în cîmpul gravitațional al Pămîntului la distanța r de centrul acestuia (fig. 3.78). Un corp de masă m lăsat

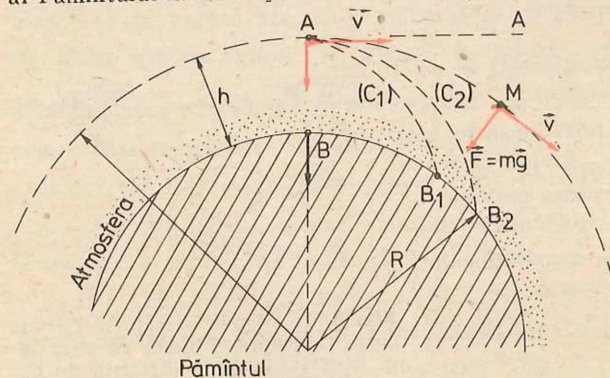


Fig. 3.78. Există o valoare a vitezei cu care un corp lansat din A se deplasează pe o traiectorie ce înconjură Pămîntul devenind satelit artificial.

liber în punctul A, se va mișca după direcția razei r, adică după linia de cîmp, și va cădea în punctul B, de la suprafața Pămîntului. Dacă în punctul A corpul are o viteză $\vec{v}$ orientată perpendicular pe direcția intensității cîmpului gravitațional $\vec{\Gamma}$ din acel punct, atunci el se mișcă descriind o traiectorie curbă care nu mai coincide cu direcția liniei de cîmp. Pentru o anumită viteză $\vec{v_1}$ a corpului, acesta se va deplasa pe curba C_1 și va ajunge pe Pămînt în punctul B_1. Pentru o altă viteză $v_2 > v_1$ corpul se va deplasa pe o curbă C_2 și va ajunge în B_2. Se observă, că pe măsură ce viteza $\vec{v}$ crește, corpul ajunge pe Pămînt într-un punct din ce în ce mai depărtat de B. Înseamnă că poate să existe o astfel de valoare a vitezei $\vec{v}$ pentru care corpul nu mai ajunge pe Pămînt ci descrie o mișcare circulară în jurul Pămîntului. Un astfel de corp se numește *satelit artificial al Pămîntului.*

Cînd satelitul descrie o mișcare circulară în jurul Pămîntului, în fiecare punct al traiectoriei, direcția vectorului viteză $\vec{v}$ este perpendiculară pe direcția intensității cîmpului gravitațional radial. Accelerația centripetă a satelitului $a = v^2/r$ este imprimată de forța gravitațională a Pămîntului, $F = m\Gamma$. Din legea a doua a dinamicii avem:

$$F = ma \text{ și } \frac{mv^2}{r} = m\Gamma, \text{ de unde rezultă } \frac{v^2}{r} = \Gamma(r).$$

Deci pentru a descrie o traiectorie de rază r viteza satelitului trebuie să ajungă la valoarea:

$$v = \sqrt{r\Gamma(r)}, \qquad (3.71)$$

unde $\Gamma(r)$ este intensitatea cîmpului gravitațional în punctele corespunzătoare traiectoriei satelitului. Ea este numeric egală cu valoarea g a accelerației gravitaționale din acel loc $\Gamma(r) = g(r)$.

Un satelit artificial al Pămîntului care are traiectoria în imediata vecinătate a suprafeței lui trebuie să aibă viteza $v_0 = \sqrt{R \cdot g_0} = 7{,}9$ km/s, unde $R = 6\,400$ km este raza Pămîntului și $g_0 = 9{,}8$ m/s^2 este accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului. Valoarea $v_0 = 7{,}9$ km/s se numește *prima viteză cosmică* și este o valoare caracteristică cîmpului gravitațional al Pămîntului.

Dacă satelitul se află la distanța $r = R + h$ de centrul Pămîntului din relațiile

$$\Gamma = g(r) = k\frac{M_P}{(R+h)^2} \text{ și } \Gamma_0 = g_0(R) = K\frac{M_P}{R^2} \text{ rezultă:}$$

$$g(r) = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

și înlocuind în expresia lui v se obține:

$$v = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}.$$

Pentru ca traiectoria satelitului să fie relativ stabilă este necesar ca asupra lui să nu se exercite forțe de frecare cu aerul (forțe perturbatoare) motiv pentru care altitudinea h la care se plasează un satelit este mare, de ordinul a 10^2 km, acolo unde rarefierea aerului este pronunțată (mare).

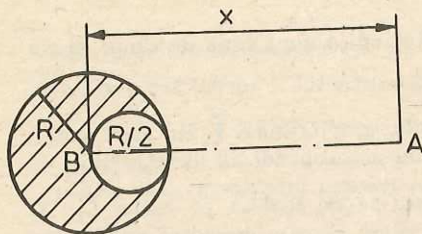


Fig. 3.79. La problema rezolvată.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Într-o sferă masivă de masă m_1 şi de rază R se practică o cavitate sferică de rază $R/2$ care este tangentă la suprafaţa sferei masive.

Să se exprime forţa gravitaţională dintre sferă şi un punct material m_2 aflat la distanţa $x (x \gg R)$ de centrul sferei masive şi pe direcţia care uneşte centrul sferei cu centrul cavităţii.

Rezolvare. Deoarece în enunţ se specifică $x \gg R$ vom considera atît sfera cît şi cavitatea sferică drept puncte materiale situate în centrele sferelor.

Distingem două cazuri:

a) punctul material se află de aceeaşi parte cu cavitatea (fig. 3.79). În acest caz forţele de interacţie sînt F_1, F_2 iar rezultanta lor este:

$$F = F_1 - F_2, \tag{1}$$

unde $F_1 = K\frac{m_1m_2}{x^2}$ şi $F_2 = K\frac{m_1m_2}{8(x - R/2)^2}$ şi înlocuind în (1)

$$F = \frac{Km_1m_2}{8}\cdot\frac{7x^2 - 8xR + 2R^2}{x^2(x - R/2)^2};$$

b) punctul material se află în partea opusă cavităţii. Avem în acest caz:

$$F' = F_1' - F_2'. \tag{1'}$$

Unde $F_1' = K\frac{m_1m_2}{x^2}$ şi $F_2' = K\frac{m_1m_2}{8\left(x + \frac{R}{2}\right)^2}$ şi înlocuind în (1') avem:

$$F' = \frac{Km_1m_2}{8}\cdot\frac{7x^2 + 8xR + 2R^2}{x^2(x + R/2)^2}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. Considerînd Pămîntul şi Luna două corpuri punctiforme, explicaţi cum variază greutatea unui cosmonaut într-o călătorie cu mişcare rectilinie uniformă de la Pămînt la Lună.
2. Explicaţi de ce toate corpurile cad la fel de repede în vid cu toate că forţa de atracţie gravitaţională este proporţională cu masa lor.
3. Undeva, într-un punct de pe suprafaţa Pămîntului se aşază un tun uriaş. Se poate lansa un satelit artificial al Pămîntului folosind acest tun? (Se neglijează dificultăţile tehnice şi frecările cu aerul.)
4. Se confecţionează un proiectil suficient de mare ca să încapă în el oameni şi materiale. Proiectilul este lansat în vid dintr-un tun special. Pasagerii afirmă că la un moment dat au încetat să mai simtă atracţia gravitaţională. Cînd a fost posibil acest lucru?

   R: tot timpul (din momentul părăsirii tunului pînă la atingerea Pămîntului).

5. Un corp cu masa $m_1 = 800$ kg se află la distanţa $r = 0{,}25$ m de un alt corp cu masa $m_2 = 600$ kg. Să se calculeze intensitatea cîmpului gravitaţional într-un punct situat la $r_1 = 0{,}20$ m de m_1 şi la distanţa $r_2 = 0{,}15$ m de m_2.

   R: $\Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2\cos\alpha}$, $\Gamma_1 = K\frac{m_1}{r_1^2}$, $\Gamma_2 = K\frac{m_2}{r_2^2}$, $\cos\alpha = 0$, $\Gamma = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ N/kg.

6. Cunoscînd că distanţa dintre Pămînt şi Lună este $d = 384 \cdot 10^3$ km şi că $m_P = 81\ m_L$, să se afle la ce distanţă de centrul Lunii cîmpul gravitaţional rezultant este nul.

   R: $x = \frac{d}{1 + \sqrt{m_P/m_L}} = \frac{d}{10} = 38{,}4 \cdot 10^3$ km.

7. Două corpuri sferice cereşti au raportul razelor 1/2 iar raportul acceleraţiilor gravitaţionale 3/2. Ştiind că valoarea masei primului corp este M_1 se cere să se determine masa celuilalt corp ceresc M_2.

   R: $M_2 = M_1\frac{g_2}{g_1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{8}{3}M_1$.

8. Ştiind că raza Soarelui este R şi densitatea medie a materiei solare este ρ_S, să se determine distanţa Pămînt-Soare, dacă perioada de rotaţie a Pămîntului în jurul Soarelui este T.

   R: $d^3 = \frac{KR^3\rho_S}{3\pi}\cdot T^2$.

9. De pe o planetă cu raza $R = 1/8$ din raza Pămîntului, trebuie lansat un satelit artificial pe o orbită circulară la înălţimea $h = 600$ km. Ştiind că masa planetei este $m = 8 \cdot 10^{21}$ kg să se calculeze: *a)* viteza tangenţială care trebuie imprimată satelitului; *b)* viteza unghiulară şi *c)* perioada lui de rotaţie.

   R: $v = \sqrt{\frac{Km}{R + h}} \approx 0{,}6$ km/s; $\omega = \frac{v}{R + h} \approx 0{,}75 \cdot 10^{-3}$ rad/s; $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 8\,320$ s.

4

ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ŞI A SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE

4.1. LUCRUL MECANIC EFECTUAT LA MIŞCAREA PUNCTULUI MATERIAL ÎNTR-UN CÎMP DE FORŢE

4.1.1. Noţiunea de lucru mecanic. În activitatea sa fizică, omul întrebuinţează fie propria sa forţă musculară, fie aceea a animalelor de muncă sau a maşinilor, cu scopul de a pune în mişcare o unealtă, un vehicul prin învingerea unei alte forţe, care se opune mişcării, sau inerţiei.

Astfel, un muncitor acţionează asupra unui cărucior deplasîndu-l (fig.4.1.). Forţa $\vec{F}$ cu care acţionează muncitorul asigură deplasarea căruciorului învingînd forţa de frecare.

În toate procesele în care se transmite mişcarea de la un corp la alt corp, un rol esenţial îl joacă o mărime fizică numită *lucru mecanic.*

Măsura lucrului mecanic este legată de noţiunea de forţă şi de deplasarea punctului de aplicaţie al forţei.

Se spune că o forţă efectuează lucru mecanic cînd aceasta acţionînd asupra unui corp îşi deplasează punctul de aplicaţie pe o anumită distanţă.

4.1.2. Lucrul mecanic al unei forţe constante al cărei punct de aplicaţie se deplasează pe suportul său. Un corp ale cărui deplasări în spaţiu sînt limitate de către alte corpuri de care este legat sau cu care este în contact, se numeşte corp supus la legături sau neliber. Exemple: o uşă fixată în balamale, o lustră fixată printr-o tijă de tavan, un vagon de tren care se mişcă pe şine.

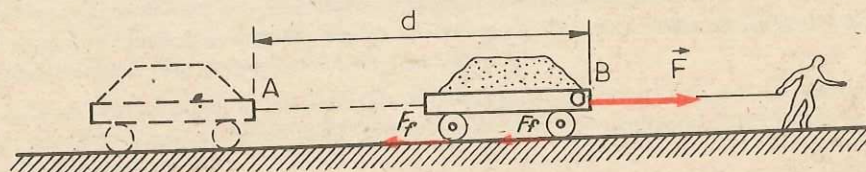


Fig. 4.1. Un om deplasează un cărucior pe un drum orizontal. Lucrul mecanic efectuat în timpul acestei deplasări este determinat de forţa de tracţiune $\vec{F}$ şi de deplasarea punctului de aplicaţie al acesteia pe distanţa *d*.

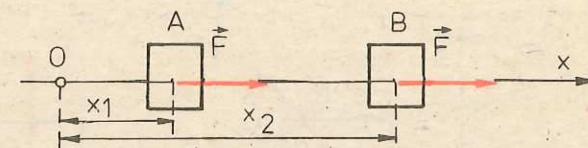


Fig. 4.2. Lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ pentru o deplasare *d* a punctului său de aplicaţie pe suportul său este: $L = Fd$

Un corp care nu este legat de alte corpuri şi care se poate deplasa în orice direcţie din spaţiu se numeste corp liber. Exemple: un balon care pluteşte în aer, un elicopter în timpul zborului.

Să considerăm un corp liber asimilat cu un punct material, care este acţionat de o forţă constantă $\vec{F}$ şi care îl deplasează pe distanţa *d* între două puncte *A* şi *B*, de coordonate x_1 şi x_2. Corpul fiind liber se deplasează pe direcţia şi în sensul forţei (fig. 4.2).

Prin definiţie, *lucrul mecanic al unei forţe constante F, al cărei punct de aplicaţie se deplasează pe distanţa d, în direcţia şi în sensul forţei, este egal cu produsul dintre mărimea forţei şi mărimea deplasării:*

$$L = Fd, \tag{4.1}$$

unde $d = x_2 - x_1$ este distanţa dintre punctele *A* şi *B*, între care se deplasează punctul de aplicaţie al forţei.

Forţa care produce mişcarea se numeşte *forţă motoare,* iar forţa care se opune mişcării se numeşte *forţă rezistentă.* Lucrul mecanic al forţei motoare se numeşte *lucru mecanic motor*, iar cel al forţei rezistente se numeşte *lucru mecanic rezistent.*

Lucrul mecanic definit prin relaţia (4.1) se poate calcula şi printr-o metodă grafică. Reprezentăm grafic variaţia forţei $\vec{F}$ în funcţie de distanţă, $F = f(x)$, într-un sistem de coordonate FOx. Forţa F, fiind constantă între x_1 şi x_2 graficul funcţiei $f(x)$ este o dreaptă paralelă cu axa Ox (fig. 4.3). Produsul $F(x_2 - x_1) = Fd$, reprezintă aria suprafeţei limitată de curba $F = f(x)$ de axa Ox şi de segmentele perpendiculare pe axa Ox în punctele $A(x_1, 0)$ şi $B(x_2, 0)$. Acest produs este egal cu lucrul mecanic efectuat de forţă pe distanţa AB.

Această metodă de aflare a lucrului mecanic este valabilă şi în cazul în care forţa F nu este constantă.

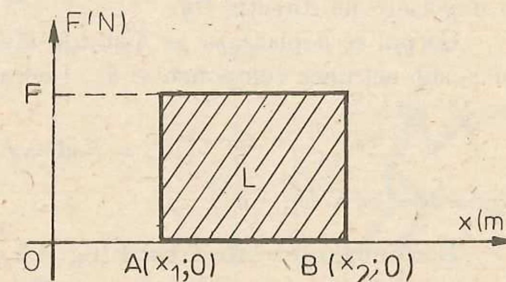


Fig. 4.3. Lucrul mecanic efectuat de forţa constantă $\vec{F}$ pe distanţa $d = x_2 - x_1$ este egal cu aria suprafeţei haşurate.

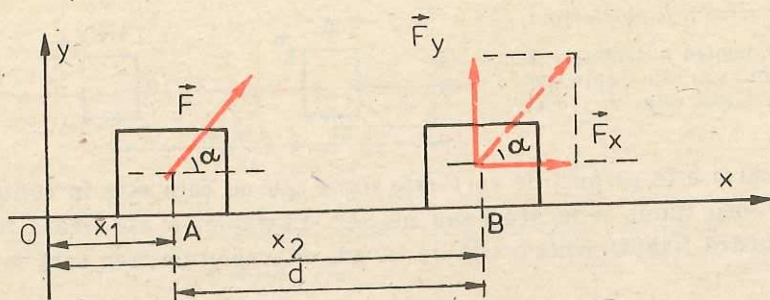


Fig. 4.4. Lucrul mecanic al forței $\vec F$, a cărei direcție este oblică în raport cu direcția deplasării, este egal cu produsul dintre componenta forței pe direcția deplasării și mărimea deplasării: $L = Fd \cos \alpha$.

Dacă în relația (4.1) se ia $F = 1$ N și $d = 1$ m se obține unitatea de lucru mecanic în SI, numită joule (J):

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ newton} \times 1 \text{ metru}.$$

Un joule este lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 newton al cărei punct de aplicație se deplasează cu un metru pe suportul forței și în sensul forței.

4.1.3. **Lucrul mecanic al unei forțe constante a cărei direcție face un unghi cu direcția deplasării.** Să considerăm un corp, asimilat cu un punct material, supus la legături, care se poate deplasa pe direcția Ox, sub acțiunea unei forțe $\vec F$, a cărei direcție face unghiul α cu direcția Ox.

Pentru calculul lucrului mecanic al forței $\vec F$, se poate folosi, și în acest caz, relația (4.1).

Se descompune forța $\vec F$ în două componente, după direcțiile perpendiculare Ox și Oy (fig. 4.4):

$$F_x = F \cos \alpha; \; F_y = F \sin \alpha. \qquad (4.2)$$

Lucrul mecanic al componentei F_y este zero deoarece ea nu produce nici o deplasare pe direcția Oy.

Corpul se deplasează pe distanța d, între punctele A și B de abscise x_1 și x_2 sub acțiunea componentei F_x. Lucrul mecanic produs de această componentă este:

$$L = F_x d = Fd \cos \alpha, \qquad (4.3)$$

unde $d = x_2 - x_1$.

Dacă unghiul α este ascuțit (fig. 4.5, *a*), forța $\vec F$ contribuie la deplasarea punctului material, aceasta este o *forță motoare* și efectuează un lucru mecanic motor; $\cos \alpha > 0$ deci $L = Fd \cos \alpha > 0$; pentru $\alpha = 0$, $L = Fd$ și pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $L = 0$.

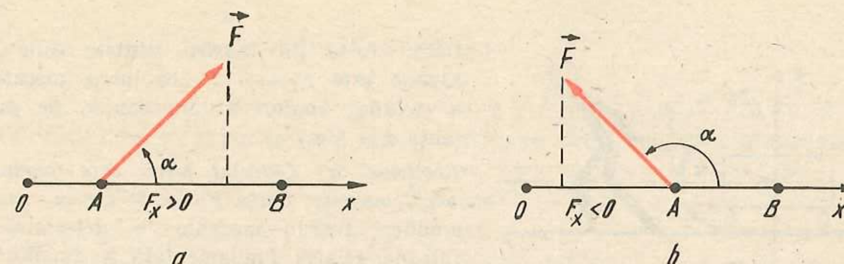


Fig. 4.5. Cînd forța $\vec F$ face un unghi $\alpha < \frac{\pi}{2}$ cu direcția deplasării, efectuează un lucru mecanic motor, $L > 0$; pentru $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ forța $\vec F$ efectuează un lucru mecanic rezistent, $L < 0$.

Dacă unghiul $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ (fig. 4.5, *b*), forța $\vec F$ se opune deplasării. $\vec F$ este o *forță rezistentă* și efectuează un lucru mecanic rezistent; în acest caz $\cos \alpha < 0$, deci $L = Fd \cos \alpha < 0$; pentru $\alpha = \pi$, $L = -Fd$.

EXEMPLE

1. Un om pune în mișcare, pe o suprafață orizontală, un corp cu masa $m = 20$ kg, acționînd asupra lui cu o forță $F = 50$ N, a cărei direcție face cu orizontala un unghi $\alpha = 37°$ ($\cos 37° = 0{,}8$). Acțiunea omului asupra corpului durează 3 secunde. Neglijînd forțele de frecare, să se calculeze lucrul mecanic efectuat de om asupra corpului.

Rezolvare. a) Calculul deplasării corpului. Vom calcula mai întîi accelerația corpului aplicînd relația fundamentală a dinamicii (fig. 4.6):

$$\vec N + m\vec g + \vec F = m\vec a. \qquad (4.4)$$

Proiectînd relația (4.4) pe direcția deplasării (pe direcția Ox), obținem:

$$F_x = F \cos \alpha = ma,$$

de unde:

$$a = \frac{50 \text{ N} \cdot 0{,}8}{20 \text{ kg}} \; 2 \text{ m/s}^2.$$

În 3 secunde corpul s-a deplasat pe distanța

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 = 9 \text{ m}; \; v_0 = 0.$$

b) Calculul lucrului mecanic. Calculăm lucrul mecanic aplicînd relația (4.3):

$$L = Fd \cos \alpha = 50 \cdot 9 \cdot 0{,}8 = 360 \text{ J}.$$

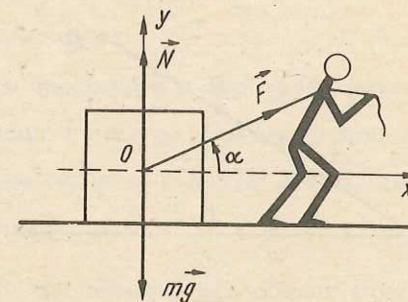


Fig. 4.6. La exemplul 1.

2. Un copil trage o sanie de masă $m = 4$ kg, cu o forță $\vec F$ care face cu direcția deplasării un unghi α, imprimîndu-i o accelerație $a = 3$ m/s².

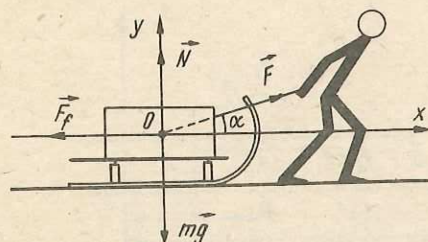


Fig. 4.7. La exemplul 2.

Dacă forța de frecare dintre sanie și zăpadă este $F_f = 5$ N, ce lucru mecanic a efectuat copilul asupra saniei, pe distanța $d = 4$ m?

Rezolvare. a) Calculul forței care produce lucrul mecanic. Forța $F_x = F \cos \alpha$, care produce lucrul mecanic o determinăm aplicînd relația fundamentală a dinamicii, la mișcarea saniei (fig. 4.7):

$$\vec{F_f} + \vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}. \quad (4.5)$$

Proiectînd relația (4.5) pe direcția deplasării, adică pe direcția Ox, obținem:

$$-F_f + F \cos \alpha = ma; \; F \cos \alpha = ma + F_f.$$

b) Calculul lucrului mecanic. Lucrul mecanic produs de forța F este dat de relația:

$$L = (F_f + ma) \cdot d = (5 \text{ N} + 4 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}^2) \cdot 4 \text{ m} = 68 \text{ J}.$$

4.1.4. **Produsul scalar a doi vectori.** Vom defini o nouă operație cu vectori și anume o operație de înmulțire a vectorilor.

Regulile de înmulțire a vectorilor sînt diferite de regulile de înmulțire a mărimilor scalare. Se pot defini două feluri de produse a doi vectori:

a) produsul scalar, al cărui rezultat este o mărime scalară;

b) produsul vectorial, al cărui rezultat este o mărime vectorială.

Produsul vectorial urmează să fie definit în capitolul 6 (§ 6.1); acum vom defini produsul scalar a doi vectori.

Să considerăm doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$, orientați după direcțiile (D_1) și (D_2), care fac între ei unghiul α (fig. 4.8).

Se numește produs scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ numărul real notat cu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, egal cu produsul modulelor celor doi vectori prin cosinusul unghiului dintre ei.

Astfel:

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha. \quad (4.6)$$

Relația (4.6) se mai poate scrie și astfel:

$$s = (a \cos \alpha)b = a(b \cos \alpha) = a_1 b = ab_1,$$

unde $a_1 = a \cos \alpha$ reprezintă componenta vectorului $\vec{a}$ pe direcția (D_2), iar $b_1 = b \cos \alpha$ este componenta lui $\vec{b}$ pe direcția (D_1).

Prin urmare produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unuia dintre ei prin componenta celuilalt pe direcția primului vector.

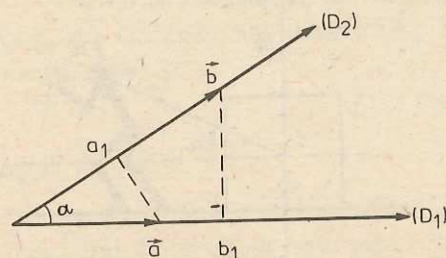


Fig. 4.8. Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este numărul real $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$.

Analizînd relația (4.6) observăm că:

a) produsul scalar este zero, ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$), cînd unul dintre vectori are modulul egal cu zero ($a = 0$ sau $b = 0$), sau cînd vectorii sînt perpendiculari

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, \; \cos \frac{\pi}{2} = 0\right);$$

b) produsul scalar este maxim cînd vectorii sînt paraleli ($\alpha = 0$, $\cos 0 = 1$);

c) produsul scalar este comutativ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = ab \cos \alpha;$$

d) produsul scalar are și proprietatea de distributivitate față de adunare:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Produsul scalar al unui vector prin el însuși este dat de relația:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2; \; a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (4.7)$$

Aplicăm această proprietate a produsului scalar pentru a obține modulul rezultantei a doi vectori. Notînd cu $\vec{c}$ suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, adică $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, și făcînd produsul scalar al vectorului $\vec{c}$ prin el însuși, obținem:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2,$$

de unde

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha,$$

unde α este unghiul dintre cei doi vectori.

Notînd cu $\vec{d}$ vectorul diferență al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, adică $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, și făcînd produsul scalar al vectorului $\vec{d}$ prin el însuși, obținem:

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2,$$

din care rezultă

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Ținînd seamă de relația de definiție a produsului scalar (4.6), putem spune că *lucrul mecanic al unei forțe constante $\vec{F}$, care-și deplasează punctul de aplicație pe distanța d este egal cu produsul scalar al vectorilor $\vec{F}$ și $\vec{d}$*, deci

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \alpha. \quad (4.8)$$

Dacă forța și deplasarea au același sens lucrul mecanic este pozitiv (lucru mecanic motor), iar dacă forța și deplasarea sînt de sensuri opuse lucrul mecanic este negativ (lucru mecanic rezistent).

Din proprietatea de distributivitate a produsului scalar, față de adunare, rezultă că lucrul mecanic al rezultantei $\vec{R}$ a unui sistem de forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ este egal cu suma lucrurilor mecanice ale forțelor componente:

$$L = \vec{R} \cdot \vec{d} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n) \cdot \vec{d} = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + ... + \vec{F}_n \cdot \vec{d};$$
$$L = L_1 + L_2 + ... + L_n.$$

4.1.5. **Lucrul mecanic al forței de greutate.** Să considerăm o regiune restrînsă din apropierea Pămîntului în care cîmpul gravitațional este uniform. În această regiune liniile de cîmp sînt drepte paralele, iar accelerația gravitațională este constantă, adică are în toate punctele aceeași mărime, direcție și sens. Greutatea unui punct material care se mișcă în acest cîmp rămîne constantă în tot timpul mișcării lui.

Într-un punct A al acestui cîmp, la înălțimea h față de suprafața Pămîntului, se află un corp de masă m, asimilat cu un punct material. Punctul material se poate deplasa de la nivelul A la nivelul B, pe verticală, sau urmînd unul dintre drumurile următoare: CD; $FGHIJKL$ sau NO (fig. 4.9).

Vom calcula lucrul mecanic al greutății corpului, cînd acesta cade liber pe verticală și apoi cînd corpul se deplasează pe planul înclinat CD, considerînd frecarea neglijabilă.

Lucrul mecanic al greutății pe distanța $AB = h$ este

$$L = mgh. \quad (4.9)$$

Lucrul mecanic al greutății corpului, cînd acesta se deplasează pe distanța $CD = l$, se poate calcula aplicînd formula (4.1). În acest scop, înlocuim greutatea cu componentele sale $G_t = G \sin \alpha$ pe planul înclinat și $G_n = G \cos \alpha$, normală pe planul înclinat.

Reacțiunea normală $\vec{N}$ a planului înclinat și forța componentă $\vec{G}_n$ nu efectuează lucru mecanic. Prin urmare, efectuează lucru mecanic numai forța componentă $\vec{G}_t$:

$$L = G_t l = mgl \sin \alpha = mgh, \quad (4.10)$$

deoarece $l \sin \alpha = h$.

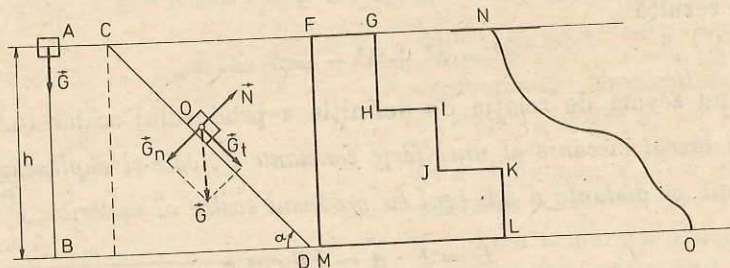


Fig. 4.9. Lucrul mecanic al greutății este egal cu produsul dintre modulul său prin diferența de nivel dintre punctul inițial și punctul final al drumului urmat de punctul său de aplicație (centrul de greutate): $L = mgh$.

Rezultă că:

lucrul mecanic al greutății este independent de drumul parcurs de punctul material și de legea mișcării acestuia și este egal cu produsul greutății prin diferența de nivel h, dintre poziția inițială și cea finală a punctului material.

Greutatea efectuează același lucru mecanic fie că se deplasează pe drumul AB, fie pe drumul $FG...KL$ sau pe drumul NO.

O forță care, acționînd asupra unui punct material, efectuează un lucru mecanic independent de drumul parcurs și de legea după care se mișcă punctul material și depinde numai de pozițiile punctelor extreme ale traiectoriei se numește *forță conservativă*. Exemple de forțe conservative: greutatea, forța elastică, forța electrostatică etc.

O regiune din spațiu, limitată sau nelimitată, unde în fiecare punct se face simțită acțiunea unei forțe determinată în modul, direcție și sens spunem că formează un cîmp de forțe. Cîmpul ale cărui forțe sînt conservative se numește *cîmp de forțe conservativ*. Cîmpul gravitațional este un exemplu de cîmp de forțe conservativ, nelimitat, creat în jurul unei mase gravitaționale. Forța care se face simțită în acest cîmp este forța de atracție gravitațională exercitată asupra corpurilor plasate în punctele cîmpului.

EXEMPLE

1. Se transportă un punct material de masă m, în cîmpul gravitațional uniform, pe drumul închis $FGH ... LMF$ (fig. 4.9). În timpul acestei deplasări asupra punctului material acționează mai multe forțe, printre care greutatea și forța de frecare. Să se calculeze lucrul mecanic al greutății și lucrul mecanic al forței de frecare pe acest drum închis.

Rezolvare. a) Calculul lucrului mecanic al greutății. Calculăm mai întîi lucrurile mecanice parțiale pe diferitele porțiuni de drum:

$L_{FG} = 0$, forța este perpendiculară pe deplasare;

$L_{GH} = mg \cdot GH$; $L_{HI} = 0$; $L_{IJ} = mg \cdot IJ$; $L_{JK} = 0$; $L_{KL} = mg \cdot KL$; $L_{LM} = 0$; $L_{MF} = - mg \cdot MF$, lucru mecanic rezistent.

Lucrul mecanic efectuat de greutate pe întreg drumul este egal cu suma lucrurilor mecanice parțiale:

$$L_{FF} = mg\,(GH + IJ + KL - MF) = 0,$$

deoarece segmentul MF este egal cu suma segmentelor GH, IJ și KL. Rezultă că lucrul mecanic al greutății pe un drum închis este egal cu zero.

b) Calculul lucrului mecanic al forței de frecare. În cazul exemplului prezentat în figura 4.9, forța de frecare este paralelă cu deplasarea și de sens opus mișcării. Deci, lucrul mecanic al forței de frecare este egal cu produsul dintre mărimea acestei forțe și lungimea drumului total parcurs de punctul material:

$$L_{F_f} = F_f \cdot (FG + HI + JK + LM + MF),$$

pe GH, IJ și KL forța de frecare fiind nulă.

Lucrul mecanic al forței de frecare depinzînd de lungimea drumului parcurs, rezultă că forța de frecare nu este o forță conservativă. Se spune că forța de frecare este o *forță disipativă*.

2. Un copil aruncă o minge cu masa $m = 100$ g pe verticală în sus și o prinde în punctul din care a fost aruncată. Mingea atinge înălțimea maximă $h_m = 5$ m. Să se calculeze lucrul mecanic al greutății în timpul urcării mingii la înălțimea h_m, la coborîrea mingii pe aceeași distanță și pe toată distanța parcursă de minge. Se va lua $g = 10$ m/s².

Rezolvare. a) Lucrul mecanic al greutății mingii, în timpul urcării acesteia, este un lucru mecanic rezistent, dat de relația:

$$L_u = -mgh_m = -5\ \text{J}.$$

b) În timpul coborîrii mingii, greutatea acesteia efectuează un lucru mecanic motor

$$L_c = mgh_m = 5\ \text{J}.$$

c) Lucrul mecanic al greutății, pe tot parcursul, este:

$$L = L_u + L_c = -5\ \text{J} + 5\ \text{J} = 0.$$

4.1.6. **Lucrul mecanic al forței elastice.** Am studiat lucrul mecanic al forțelor constante, însă în practică întîlnim foarte des forțe care variază în funcție de poziția corpului asupra căruia ele acționează. Un exemplu de astfel de forță este forța elastică:

$$F = -kx, \qquad (4.11)$$

unde k este constanta elastică a resortului și x este deformarea resortului.

Forța elastică este egală și de sens opus forței deformatoare $F_1 = kx$. În timpul deformării resortului, se deplasează pe distanța x, atît punctul de aplicație al forței deformatoare $\vec{F}_1$ cît și cel al forței elastice $\vec{F}$. Ambele forțe efectuează lucru mecanic. La întindere sau comprimare, lucrul mecanic al forței deformatoare $\vec{F}_1$ este un lucru mecanic motor, pe cînd cel al forței elastice $\vec{F}$ este un lucru mecanic rezistent. Aceste două lucruri mecanice sînt egale și de semn contrar.

Lucrul mecanic L, al unei forțe variabile $F = f(x)$, al cărei punct de aplicație se deplasează pe distanța AB (fig. 4.10, *a* și *b*), este egal cu aria S, a suprafeței limitată de curba $f(x)$, un segment din axa Ox și două ordonate (cele ale punctelor A_1 și B_1). Dacă în intervalul $[a, b]$ $f(x) \geq 0$, atunci aria S

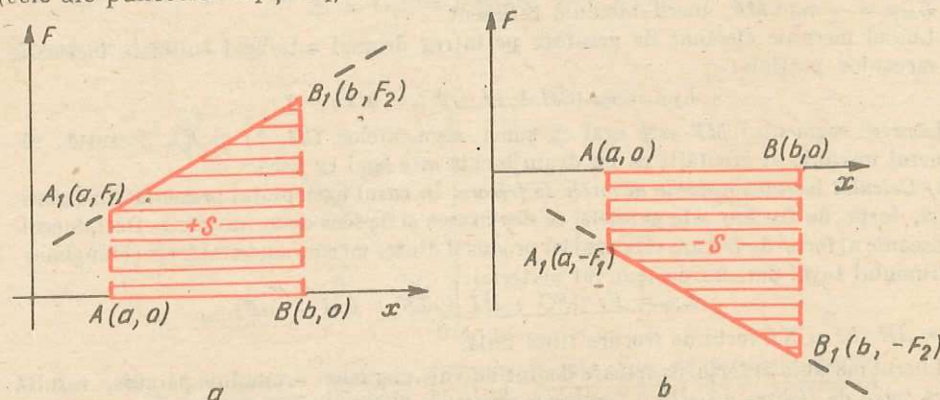


Fig. 4.10. *a)* Aria S este pozitivă dacă se află deasupra axei Ox; *b)* aria S este negativă dacă se află sub axa Ox.

este pozitivă, deci și lucrul mecanic este pozitiv (fig. 4.10, *a*), iar dacă $f(x) \leq 0$, atunci aria S este negativă, deci și lucrul mecanic este negativ (fig. 4.10, *b*).

Vom calcula lucrul mecanic al forței elastice $F = -kx$ folosind graficul de variație al acestei forțe în funcție de x, într-un sistem de coordonate FOx (fig. 4.11). Graficul funcției $F = -kx$ este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate.

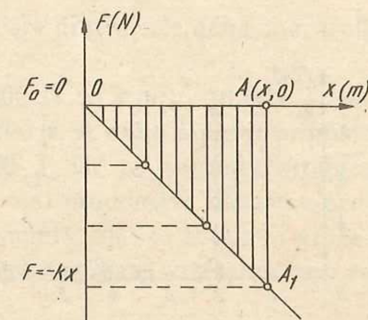


Fig. 4.11. Lucrul mecanic al forței elastice $F = -kx$, pentru $x \in [0,x]$ este egal cu aria suprafeței hașurate.

Lucrul mecanic al forței elastice este egal cu aria suprafeței limitată de dreapta $F = -kx$ și segmentele de dreaptă OA și AA_1, deci este egal cu aria triunghiului A_1AO:

$$L = \frac{AA_1 \cdot OA}{2} = -\frac{kx \cdot x}{2}.$$

Așadar:

$$L = -\frac{kx^2}{2}. \qquad (4.12)$$

Din relația (4.12) rezultă că lucrul mecanic al forței elastice depinde numai de poziția punctului inițial și a celui final al drumului parcurs de punctul de aplicație al forței. Deci *forța elastică este o forță conservativă*. Forțele din interiorul resortului constituie un cîmp de forțe conservativ unidimensional.

EXEMPLE

1. O forță, care acționează asupra unui corp, variază în funcție de distanță după legea $F = 3x$, unde F este exprimată în newtoni și distanța x în metri. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forță între punctele $A(2, 0)$ și $B(6, 0)$.

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat de forță este egal cu aria suprafeței limitată de dreapta $F = 3x$, de segmentul AB și de ordonatele $F(x_1) = AA_1$ și $F(x_2) = BB_1$ (fig. 4.12). Prin urmare lucrul mecanic al forței $F = 3x$ este egal cu aria trapezului AA_1B_1B:

$$L = \frac{AA_1 + BB_1}{2} AB = \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2}(x_2 - x_1) = 48\ \text{J}.$$

Din relația de mai sus rezultă că lucrul mecanic al forței variabile $F = 3x$ poate fi calculat înmulțind media aritmetică a valorilor inițială și finală a forței cu deplasarea punctului de aplicație al forței.

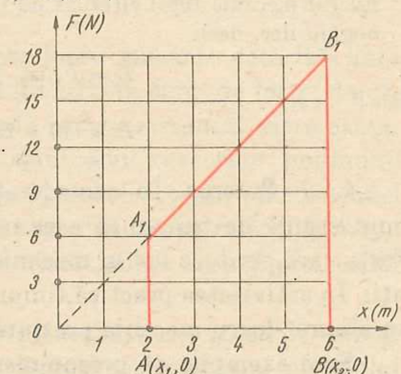


Fig. 4.12. La exemplul 1.

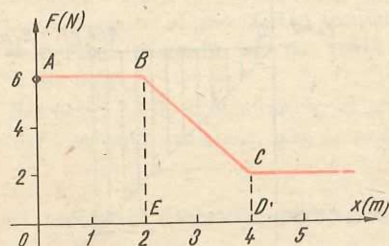


Fig. 4.13. La exemplul 2.

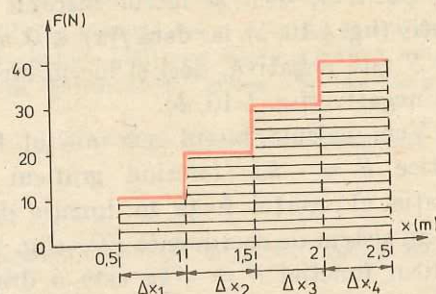


Fig. 4.14. Lucrul mecanic efectuat de forța variabilă F este: $L = \sum_i^n F_i \Delta x_i$.

2. O forță $\vec{F}$ ce se exercită asupra unui corp variază în funcție de deplasarea punctului său de aplicație după cum se arată în graficul din figura 4.13. Ce lucru mecanic efectuează forța pe intervalul [0 m; 4 m]?

Rezolvare. Lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este egal cu aria suprafeței $OABCDO$. Observăm că această suprafață se compune din: dreptunghiul $OABEO$ și trapezul $EBCDE$. Valoarea lucrului mecanic căutat este egală cu suma ariilor dreptunghiului $OABEO$ și trapezului $EBCDE$, deci:

$$L = OA \times OE + \frac{(BE + CD)}{2} ED,$$

$$L = 6\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} + \frac{(6\ \text{N} + 2\ \text{N})}{2} \cdot 2\ \text{m} = 20\ \text{J}.$$

3. O forță variabilă F acționează asupra unui punct material, deplasîndu-l pe o anumită distanță Δx. În figura 4.14 este reprezentată variația forței în funcție de distanță, $F = f(x)$. Să se calculeze lucrul mecanic total efectuat de către forța $\vec{F}$, între limitele între care variază x, și care sînt indicate pe figură.

Rezolvare. Lucrul mecanic total este egal cu aria suprafeței hașurate pe figură. Se împarte suprafața hașurată într-un număr de dreptunghiuri, de bază Δx_i, astfel ca pe intervalul Δx_i, forța să fie constantă.

Lucrul mecanic total efectuat de forța $\vec{F}$ este egal cu suma ariilor $F_i \Delta x_i$, a dreptunghiurilor, deci:

$$L = F_1\Delta x_1 + F_2\Delta x_2 + F_3\Delta x_3 + F_4\Delta x_4,$$

sau

$$L = (10 + 20 + 30 + 40) \cdot 0{,}5 = 50\ \text{J}.$$

4.1.7. **Puterea.** În considerațiile pe care le-am făcut pînă acum nu am ținut seamă de timpul în care o forță efectuează un anumit lucru mecanic. Forța care produce lucrul mecanic se poate datora unui motor sau unei instalații. În activitatea practică, timpul în care o instalație sau un motor efectuează un anumit lucru mecanic prezintă o deosebită importanță.

Spre exemplu, să presupunem că o macara ridică o sarcină de 5 000 N la 2 metri înălțime în 50 secunde, iar alta ridică o sarcină de 8 000 N la 3 metri înălțime în 60 secunde. Se pune întrebarea care dintre cele două macarale este mai productivă?

Prima efectuează lucrul mecanic $L_1 = 5\,000\ \text{N} \times 2\ \text{m} = 10\,000\ \text{J}$, iar într-o secundă produce un lucru mecanic de 200 J/s. A doua macara produce lucrul mecanic $L_2 = 8\,000\ \text{N} \times 3\ \text{m} = 24\,000\ \text{J}$, iar pe secundă produce lucrul mecanic de 400 J/s. A doua macara este mai productivă deoarece produce un lucru mecanic mai mare în timp de o secundă, deci ea este mai puternică decît prima. Puterea este o mărime care caracterizează viteza cu care se efectuează un lucru mecanic.

Prin definiție, *puterea medie într-un interval de timp Δt este egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat și timpul necesar producerii acestui lucru mecanic:*

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t}. \qquad (4.13)$$

Am definit puterea medie deoarece, în general, lucrul mecanic nu se efectuează în mod uniform în timp.

În cazul cînd puterea este constantă, ea este dată de relația:

$$P = \frac{L}{t}. \qquad (4.14)$$

Dacă în relația (4.14) se ia $L = 1$ joule și $t = 1$ secundă, se obține *unitatea pentru putere numită watt*, cu simbolul W:

$$1\ \text{watt} = \frac{1\ \text{joule}}{1\ \text{secundă}}; \quad 1\ \text{W} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{s}}.$$

4.2. ENERGIA CINETICĂ. TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE A PUNCTULUI MATERIAL

4.2.1. **Noțiunea de energie.** Energia este o mărime fizică scalară ce caracterizează capacitatea unui corp sau a unui sistem de corpuri de a produce lucru mecanic.

Dacă un corp are capacitatea să efectueze lucru mecanic datorită unor factori mecanici cum ar fi schimbarea poziției lui într-un cîmp de forțe, deformației sale sau accelerării sale spunem că posedă *energie mecanică*. Spre exemplu, un corp în cădere poate acționa mecanismul unui ceasornic punîndu-l în mișcare (fig. 4.15). Apa zăgăzuită de un baraj poate acționa paletele unei turbine punînd în funcțiune un gater, o moară sau o hidrocentrală (fig. 4.16). Resortul comprimat, al unui pistol jucărie, prin destindere aruncă proiectilul la o anumită distanță.

Din exemplele date rezultă că un corp efectuează lucru mecanic numai dacă acesta trece dintr-o stare în alta. Astfel, resortul comprimat al pistolului jucărie efectuează lucru mecanic numai cînd acesta se destinde.

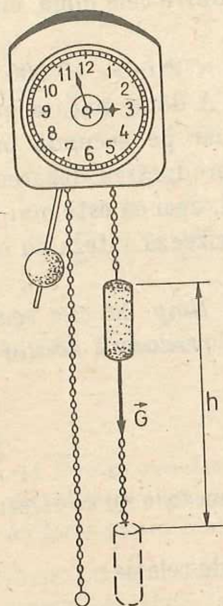


Fig. 4.15. Funcționarea ceasornicului reprezentat în figură este asigurată prin acțiunea unui corp în cădere asupra mecanismului său.

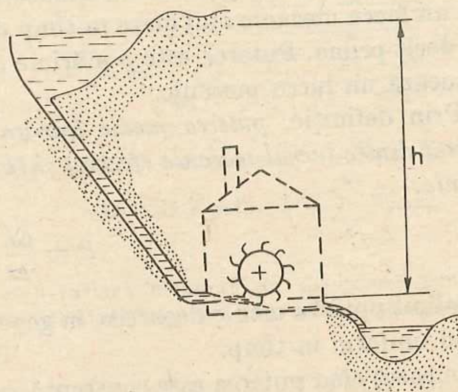


Fig. 4.16. Apa zăgăzuită de barajul unei hidrocentrale are înmagazinată în ea energie. Această apă poate acționa paletele unei turbine producînd un lucru mecanic.

Deoarece energia unui corp (sistem de corpuri) este legată de posibilitatea acestui corp (sistemului de corpuri) de a efectua lucru mecanic, este normal ca energia corpului (sistemului) să scadă cînd el efectuează lucru mecanic asupra altor corpuri și invers, să crească cînd se efectuează lucru mecanic asupra lui.

Fiecărei stări a corpului (sistemului) îi corespunde o energie, pe care o notăm cu E, iar la trecerea corpului (sistemului) din starea A în starea B energia variază cu valoarea:

$$\Delta E = E_B - E_A.$$

Variația ΔE (creșterea sau descreșterea) a energiei este măsurată prin lucrul mecanic efectuat în timpul acestei variații.

Energia este o mărime fizică de stare, caracterizînd corpul (sistemul) într-o stare staționară. Lucrul mecanic caracterizează corpul (sistemul) cînd acesta ia parte la procesul de trecere dintr-o stare A într-o stare B. Deci, lucrul mecanic este o mărime de proces.

Energia mecanică E, pe care o studiem în continuare, are două părți: *energia cinetică* E_c, sau energia de mișcare, și *energia potențială* E_p, numită și energie de poziție sau energie de configurație.

Energia are aceeași unitate de măsură ca și lucrul mecanic (joule; J).

4.2.2. **Energia cinetică a punctului material.** Corpurile în mișcare posedă energie, deoarece acționînd asupra altor corpuri le pot deplasa, deci pot să efectueze lucru mecanic.

Energia pe care o posedă un corp datorită mișcării sale (în raport cu un sistem de referință dat) se numește *energie cinetică*. Iată cîteva exemple de corpuri care posedă energie cinetică: vîntul, care reprezintă mișcarea unor mase de aer, prin acțiunea sa poate pune în mișcare o moară de vînt, o navă cu vele, poate smulge copacii din pămînt sau poate avaria clădiri cînd viteza sa depășește o anumită valoare; un ciocan în mișcare care lovește un cui și îl introduce într-un material oarecare; o apă curgătoare (apa unui rîu) care poate transporta pe suprafața sa plute făcute din trunchiuri de copac.

Energia cinetică a unui corp, este definită prin lucrul mecanic pe care trebuie să-l efectueze acest corp din momentul frînării sale și pînă la oprirea sa, sau prin lucrul mecanic efectuat pentru a-i imprima o anumită viteză.

Să considerăm un punct material în mișcare rectilinie uniform variată sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$. Viteza punctului material variază pe distanța $d = x_2 - x_1$, dintre două puncte A și B de pe traiectorie, de la $\vec{v}_1$ la $\vec{v}_2$ (fig. 4.17). Legătura dintre cele două viteze este dată de formula lui Galilei:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ad. \tag{4.15}$$

Înlocuind în (4.15) accelerația a, prin valoarea sa dată de relația fundamentală a dinamicii $F = ma$, obținem:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fd. \tag{4.16}$$

Termenul Fd reprezintă lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ pe distanța $d = x_2 - x_1$, deci

$$L_{AB} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{4.17}$$

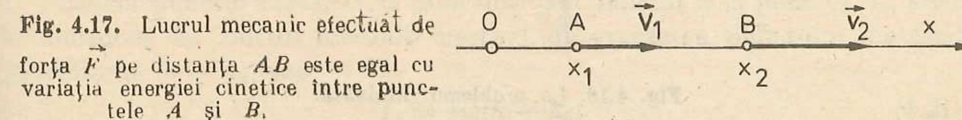
Din relația (4.17) rezultă că lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ care acționează asupra punctului material a contribuit la variația mărimii

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2, \tag{4.18}$$

numită prin definiție energia cinetică a punctului material.

Deci, *energia cinetică a unui corp de masă m. care se află în mișcare de translație cu viteza v, în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu semiprodusul dintre masa corpului și pătratul vitezei acestuia.*

Fig. 4.17. Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pe distanța AB este egal cu variația energiei cinetice între punctele A și B.



Relația (4.17) exprimă teorema variației energiei cinetice pe care o enunțăm astfel:

variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații.

În concluzie, putem spune că energia cinetică a punctului material este o mărime care caracterizează mișcarea sa mecanică. Fiecărei stări de mișcare a punctului material îi corespunde o energie cinetică, iar la trecerea punctului material dintr-o stare de mișcare (*1*) într-o altă stare de mișcare (*2*) energia lui cinetică variază cu valoarea:

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}.$$

Modificarea stării de mișcare a punctului material se datorează forței rezultante care acționează asupra lui. Înseamnă că lucrul mecanic L al forței rezultante este o măsură a efectelor acestei forțe în procesele de modificare a stării de mișcare. Deci, lucrul mecanic al forței rezultante este egal cu variația energiei cinetice a punctului material:

$$L = E_{c2} - E_{c1}. \qquad (4.19)$$

EXEMPLE

1. Un om deplasează un corp cu masa $m = 50$ kg, pe o suprafață orizontală cu viteza $v = 0{,}8$ m/s (fig. 4.18). Coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală este $\mu = 0{,}1$. Să se calculeze:
a) forța de tracțiune exercitată de om asupra corpului, aplicînd teorema variației energiei cinetice;
b) puterea medie dezvoltată de om. Se dă $g = 10$ m/s².

Rezolvare. a) Lucrul mecanic rezultant, efectuat de forțele $\vec{F}, \vec{F_f}, \vec{N}$ și $\vec{G}$ care acționează asupra corpului, este o măsură a efectelor forțelor, pentru procesele însoțite de schimbarea vitezei corpului. Cum viteza corpului nu se modifică, lucrul mecanic rezultant este nul:

$$L = (\vec{F} + \vec{F_f} + \vec{G} + \vec{N})\cdot\vec{d} = Fd - F_f d = 0. \qquad (4.20)$$

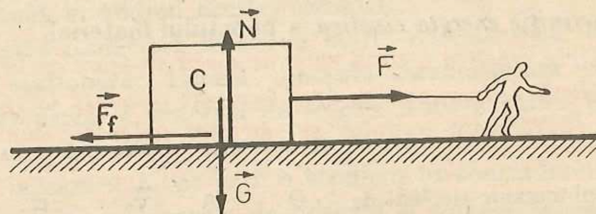


Fig. 4.18. La problema rezolvată.

Din relația (4.20) rezultă că lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este egal cu lucrul mecanic al forței $\vec{F_f}$ și de semn contrar. Aceste lucruri mecanice sînt o măsură a interacțiunii însoțite de modificarea poziției corpului. Cum corpul se deplasează, aceste lucruri mecanice sînt diferite de zero. Din relația (4.20) obținem:

$$F = F_f = \mu mg = 50 \text{ N},$$

b) Puterea medie este dată de relația

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{F\Delta x}{\Delta t} = Fv_m.$$

Deoarece viteza este constantă, rezultă

$$P = Fv = 50 \cdot 0{,}8 = 40 \text{ W}.$$

2. Un automobil cu masa de 1 000 kg pornește din repaus și ajunge la viteza de 30 m/s după ce parcurge 500 m, pe un drum orizontal. Să se calculeze forța de tracțiune a motorului, dacă forța de frecare este de 200 N.

Rezolvare. Asupra automobilului acționează forțele: greutatea $\vec{G}$, reacțiunea normală $\vec{N}$, forța de tracțiune $\vec{F}$ și forța de frecare $\vec{F_f}$. Suma algebrică a lucrurilor mecanice ale forțelor ce acționează asupra automobilului pe distanța d este:

$$\Sigma L_i = Fd - F_f d.$$

Acest lucru mecanic fiind diferit de zero, el este folosit pentru accelerarea automobilului.
Aplicînd teorema variației energiei cinetice, obținem:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = (F - F_f)d,$$

de unde

$$F = \frac{mv^2}{2d} + F_f = 1\,100 \text{ N}.$$

4.3. ENERGIA POTENȚIALĂ A PUNCTULUI MATERIAL ÎN CÎMP CONSERVATIV DE FORȚE. ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ÎN CÎMP CONSERVATIV DE FORȚE

4.3.1. Energia potențială a punctului material în cîmpul gravitațional. Considerăm un punct material de masă m plasat într-un punct A din cîmpul gravitațional al Pămîntului considerat uniform (fig. 4.19). Punctul material și Pămîntul, care interacționează prin cîmpul gravitațional, alcătuiesc un sistem fizic deformabil în cadrul căruia acționează forțe conservative (forțele de greutate). Configurația sistemului (starea sistemului) este determinată de înălțimea h a punctului material față de un plan orizontal P de la suprafața Pămîntului, luat ca nivel de referință. Spunem că înălțimea h este un parametru de stare al sistemului.

Lăsăm punctul material să cadă liber din punctul A în punctul A_0, aflat la înălțimea h_0. Lucrul mecanic efectuat de greutatea punctului material pe distanța $h - h_0$ este

$$L = mg(h - h_0). \qquad (4.21)$$

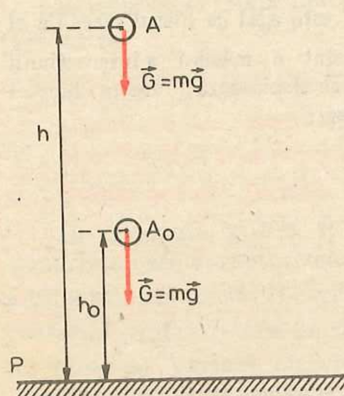


Fig. 4.19. Variaţia energiei potenţiale a sistemului Pămînt-punct material, pentru deplasarea punctului material din A în A_0 este egală şi de semn contrar cu lucrul mecanic efectuat de greutate pe distanţa AA_0: $\Delta E_p = -mg(h - h_0)$.

Astfel punctul material apropiindu-se de Pămînt poate efectua un lucru mecanic. Din acest motiv noi spunem că sistemul alcătuit din Pămînt şi punctul material — sistem deformabil (cu interacţiune gravitaţională) — posedă energie. Această energie, care depinde de poziţia punctului material faţă de Pămînt, se numeşte energie de poziţie sau *energie potenţială gravitaţională.*

Cu toate că energia potenţială caracterizează starea sistemului Pămînt-punct material, datorită unei comodităţi de exprimare se spune adesea: energia potenţială gravitaţională a punctului material, lăsînd impresia că se face abstracţie de rolul esenţial al Pămîntului care generează cîmpul gravitaţional.

Fiecărei configuraţii (stări) a sistemului îi corespunde o energie potenţială E_p, iar modificarea configuraţiei sistemului determină variaţia energiei potenţiale. Astfel, dacă punctul material se deplasează din poziţia iniţială A, de altitudine h, în poziţia finală A_0 de altitudine h_0 (fig. 4.19), energia potenţială a sistemului suferă variaţia:

$$\Delta E_p = E_{p0} - E_p. \tag{4.22}$$

Energia potenţială E_p a sistemului nu se poate determina în mod absolut, se pot măsura variaţiile acestei energii, prin lucrul mecanic efectuat de către forţele de greutate.

Prin convenţie, variaţia energiei potenţiale între două stări (configuraţii date) este egală şi de semn contrar cu lucrul mecanic al forţelor de greutate, exercitate asupra punctului material, între aceste stări, deci:

$$\Delta E_p = E_{p0} - E_p = -mg(h - h_0), \tag{4.23}$$

sau

$$E_{p0} - E_p = mgh_0 - mgh.$$

Dacă se alege starea căreia îi corespunde parametrul $h_0 = 0$, ca stare de referinţă şi căreia i se atribuie energia potenţială E_{p0}, atunci energia potenţială a sistemului în starea corespunzătoare parametrului h va fi dată de relaţia:

$$E_p = mgh + E_{p0}. \tag{4.24}$$

Din relaţia (4.24) rezultă că energia potenţială nu este total determinată, ea este determinată pînă la constanta arbitrară aditivă E_{p0}, căreia i se poate da în mod convenţional valoarea zero. În acest caz

$$E_p = mgh. \tag{4.25}$$

Configuraţia (starea) pentru care s-a convenit să se ia energia potenţială a sistemului egală cu zero $E_{p0} = 0$ se numeşte configuraţie zero (starea zero).

Alegerea configuraţiei zero, adică a nivelului de referinţă pentru energia potenţială, este cu totul arbitrară. În rezolvarea problemelor se ia drept configuraţie zero acea configuraţie în care energia potenţială a sistemului este minimă şi căreia i se atribuie în mod convenţional valoarea zero.

EXEMPLE

1. În figura 4.20 se prezintă o porţiune a cîmpului gravitaţional din apropierea unei planete. Se indică, de asemenea, valoarea energiei potenţiale, pentru diferite configuraţii ale sistemului alcătuit dintr-un corp cu masa $m = 2$ kg şi planetă (sistemul corp-planetă cu interacţiune gravitaţională).

Să se calculeze:

a) lucrul mecanic necesar deplasării corpului din punctul A în punctul B, cu viteză constantă;

b) lucrul mecanic al greutăţii cînd corpul cade liber din punctul C pînă la suprafaţa planetei;

c) lucrul mecanic al greutăţii, efectuat în timpul deplasării corpului, cu viteză constantă, din punctul A în punctul D.

Rezolvare. a) Lucrul mecanic efectuat de forţa externă sistemului, care deplasează corpul din A în B, este egal şi de semn contrar cu lucrul mecanic al greutăţii, care la rîndul său este egal şi de semn contrar cu diferenţa dintre energiile potenţiale din stările B şi A, deci:

$$L_{AB} = -L_{G(AB)} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -6 \text{ J}.$$

Pentru deplasarea corpului din A în B s-a cheltuit un lucru mecanic egal cu 6 J, iar energia potenţială a sistemului a crescut cu 6 J.

b) Lucrul mecanic al greutăţii pe distanţa CO este egal şi de semn contrar cu diferenţa energiilor potenţiale din stările O (sol) şi C:

$$L_{G(CO)} = -(E_{pO} - E_{pC}) = -(0 - 8 \text{ J}) = 8 \text{ J}.$$

Prin deplasarea corpului din C în O, energia potenţială a sistemului a scăzut cu 8 J.

c) Putem deplasa corpul din A în B pe unul din drumurile notate de la 1 la 4 pe figura 4.21. Greutatea fiind o forţă conservativă, lucrul său mecanic nu depinde de drum. Indiferent ce drum am urma, pentru deplasarea corpului din A în D, lucrul mecanic al greutăţii este acelaşi. Alegînd drumul 1, adică drumul ABD, lucrul mecanic căutat este:

$$L_{G(AD)} = L_{G(AB)} + L_{G(BD)} = 6 \text{ J} + 0 = 6 \text{ J}.$$

Pe distanţa BD greutatea nu efectuează lucru mecanic deoarece diferenţa de nivel dintre B şi D este nulă.

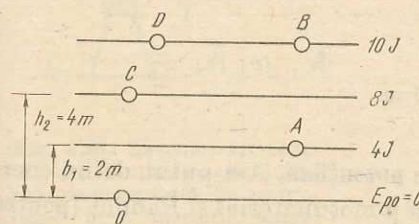


Fig. 4.20. La exemplul 1.

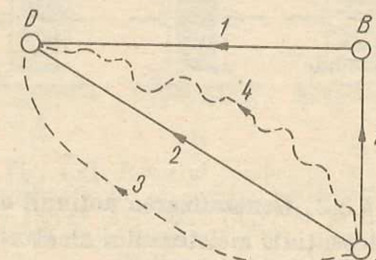


Fig. 4.21. La exemplul 1.

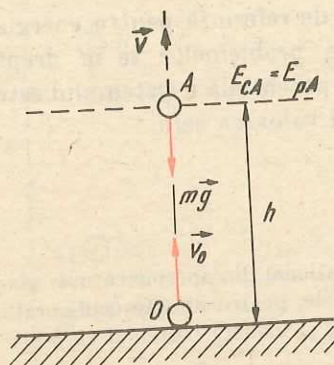


Fig. 4.22. La exemplul 3.

2. Un corp cu masa $m = 3$ kg cade liber de la înălțimea $h = 5$ m. Să se calculeze energia cinetică a corpului și energia potențială a sistemului corp-Pămînt, cînd corpul se află la înălțimea $h_1 = 2$ m deasupra Pămîntului. Se va lua $g = 10$ m/s².

Rezolvare. Energia cinetică la înălțimea h_1 este:

$$E_c = \frac{mv_1^2}{2}, \text{ unde } v_1^2 = 2g(h - h_1),$$

deci

$$E_c = mg(h - h_1) = 90 \text{ J}.$$

Energia potențială a sistemului, cînd corpul se află la înălțimea h_1 față de Pămînt, este:

$$E_p = mgh_1 = 60 \text{ J}.$$

Am considerat suprafața Pămîntului nivel zero pentru energia potențială.

3. Un corp este aruncat pe verticală în sus cu viteza $v_0 = 10$ m/s. La ce înălțime energia cinetică a corpului este egală cu energia potențială a sistemului corp-Pămînt? Se va lua $g = 10$ m/s².

Rezolvare. a) Vom considera nivelul zero pentru energia potențială suprafața Pămîntului și nivelul la care energia cinetică este egală cu energia potențială, nivelul corespunzător punctului A (fig. 4.22).

Deci

$$E_{pA} = E_{cA} = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.26)$$

Variația energiei potențiale între nivelele A și O (sol) este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al greutății pe distanța OA, deci:

$$E_{pA} - E_{pO} = -L_{G(OA)} = -(-mgh). \quad (4.27)$$

Am luat $L_G = -mgh$, deoarece L_G este un lucru mecanic rezistent.
Avînd în vedere relațiile (4.26) și (4.27), obținem:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.28)$$

Variația energiei cinetice pe distanța OA este egală cu lucrul mecanic al greutății pe această distanță:

$$E_{cA} - E_{cO} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh. \quad (4.29)$$

Comparînd relațiile (4.28) și (4.29), obținem:

$$mgh - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh,$$

de unde

$$h = \frac{v_0^2}{4g} = 2{,}5 \text{ m}.$$

4.3.2. **Generalizarea noțiunii de energie potențială.** Am putut defini energia potențială a sistemului alcătuit dintr-un punct material și Pămînt (pentru deplasări mici cînd cîmpul gravitațional este uniform) numai datorită faptului că în cadrul sistemului acționează forțe conservative (forțele de greutate). Deci, se poate defini energia potențială a oricărui sistem în care acționează forțe conservative: forțe gravitaționale; forțe elastice, datorate deformării temporare a unui solid; forțe electrostatice; forțe magnetice care se exercită între magneți permanenți.

Lucrul mecanic efectuat de către forțele conservative care acționează în sistem este egal și de semn opus cu variația energiei potențiale a acestuia

$$L = -(E_{p2} - E_{p1}) = E_{p1} - E_{p2},$$

unde E_{p1} este energia potențială a sistemului în stare inițială și E_{p2} este energia potențială a sistemului în stare finală.

În cazul sistemelor în care acționează forțe neconservative nu se poate defini o energie potențială. Spre exemplu, în sistemele în care acționează: forțele de presiune dintr-un gaz, forțe electromagnetice, forțe de frecare.

4.3.3. **Energia potențială în cîmpul forțelor elastice.** Să ne închipuim un arcaș care și-a încordat arcul (fig. 4.23). Pe coarda întinsă a arcului se sprijină o săgeată. Sistemul arc-săgeată are înmagazinat în el o energie mecanică, numită energie potențială elastică. Acest sistem este capabil să producă un lucru mecanic în momentul cînd se dă drumul corzii care aruncă săgeata spre țintă. Deci cînd sistemul își modifică configurația.

Să comprimăm un resort și să așezăm apoi pe el un corp (fig. 4.24). Cînd resortul este lăsat liber, el se destinde și se lansează corpul, efectuînd un lucru mecanic. Deci, resortul comprimat (același lucru și pentru resortul întins) posedă energie potențială elastică.

Energia potențială de deformare a unui corp elastic, spre exemplu energia potențială a unui resort elastic, depinde de poziția relativă a diferitelor părți ale acestui corp.

Variația energiei potențiale elastice a resortului este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al forțelor elastice. Deci, conform relației (4.12), obținem:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.30)$$

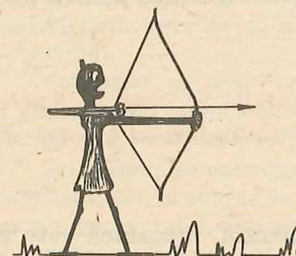


Fig. 4.23. Sistemul arc-coardă are înmagazinată în el energie potențială. Se va produce lucru mecanic numai dacă se dă drumul corzii care va arunca săgeata din arc.

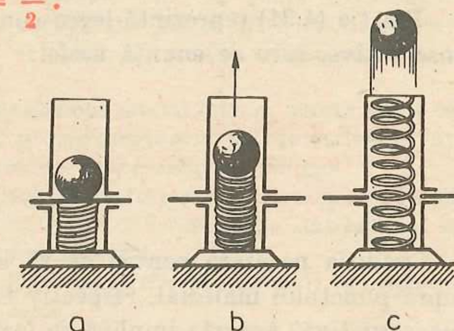


Fig. 4.24. Resortul comprimat are înmagazinată în el energie potențială. Dacă resortul este lăsat liber, el se destinde și lansează corpul care este așezat pe el, efectuînd lucru mecanic.

4.3.4. **Energia mecanică a punctului material în cîmp conservativ de forțe.** Fie un sistem alcătuit dintr-un punct material și un alt corp (presupus fix), interacționînd printr-un cîmp de forțe conservativ (spre exemplu cîmpul gravitațional). Presupunem că asupra sistemului nu acționează forțe provenind de la alte sisteme, adică, sistemul este izolat.

Considerăm că punctul material se deplasează în cîmp sub acțiunea forțelor cîmpului. În timpul deplasării punctului material se produce o variație continuă atît a energiei cinetice cît și a energiei potențiale a sistemului. Astfel la momentul $t_0 = 0$, sistemul posedă energia cinetică E_{c0} și energia potențială E_{p0}, iar la momentul t posedă energia cinetică E_c și energia potențială E_p.

Conform teoremei variației energiei cinetice $L = E_c - E_{c0}$ și a definiției energiei potențiale $L = -(E_p - E_{p0})$, unde L este lucrul mecanic al forței rezultante aplicată punctului material în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$, deci:

$$L = E_c - E_{c0} = -(E_p - E_{p0}),$$

de unde

$$E_c + E_p = E_{c0} + E_{p0}. \quad (4.31)$$

Din relația (4.31) rezultă că în timpul modificării configurației unui sistem fizic izolat, în care acționează forțe conservative, suma

$$E = E_p + E_c, \quad (4.32)$$

numită *energia mecanică* a sistemului, are o valoare constantă pentru orice stare (configurație) a sistemului.

4.4. CONSERVAREA ENERGIEI MECANICE

Relația (4.31) reprezintă legea conservării energiei mecanice pentru forțe conservative, care se enunță astfel:

energia mecanică, $E = E_c + E_p$, a unui sistem izolat în care acționează forțe conservative este constantă, deci energia mecanică a acestui sistem se conservă.

Condiția necesară pentru ca să se conserve energia mecanică este ca asupra punctului material, respectiv în sistem, să nu acționeze nici o forță neconservativă. Aceasta implică ca forțele de frecare să fie nule, iar sistemul să nu cuprindă mașini termice sau mașini electrice.

4.4.1. **Conservarea energiei mecanice în mișcarea de cădere liberă.** Fie un punct material de masă m, plasat într-un punct A din cîmpul gravitațional uniform al Pămîntului. Considerăm sistemul fizic Pămînt-punct material, izolat.

Energia mecanică a sistemului, cînd punctul material se află în punctul A, este

$$E_A = E_{pA} + E_{cA} = mgh,$$

deoarece $E_{cA} = 0$, punctul material fiind imobil în A (fig. 4.25).

În A se lasă punctul material să cadă liber; el ajunge în punctul B cu viteza

$$v_B = \sqrt{2gx},$$

unde $x = AB$.

Energia mecanică a sistemului, cînd punctul material se află în B, este

$$E_B = E_{pB} + E_{cB} = mg(h - x) + mgx = mgh,$$

deoarece $E_{cB} = \frac{mv_B^2}{2} = mgx.$

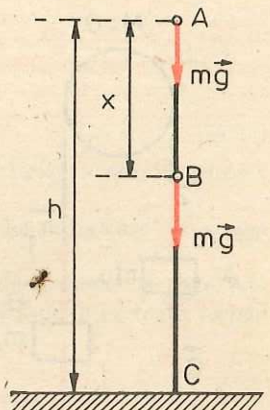


Fig. 4.25. În timpul mișcării unui punct material în cîmpul gravitațional, energia mecanică este constantă.

Energia mecanică a sistemului este constantă în timpul căderii libere a punctului material. În timpul acestei mișcări variază atît energia cinetică cît și energia potențială a sistemului.

4.5. SISTEME DE PUNCTE MATERIALE. FORȚE INTERNE ȘI FORȚE EXTERNE

4.5.1. **Sistem mecanic.** Corpurile și sistemele de corpuri din natură pot fi descrise din punct de vedere al echilibrului și al mișcărilor lor relative, precum și din punctul de vedere al interacțiunilor care influențează aceste mișcări, ca *sisteme de puncte materiale* între care, în general, se exercită anumite forțe de interacțiune. De exemplu, sistemul solar poate fi considerat în primă aproximație ca un sistem de puncte materiale (planetele și Soarele ale căror dimensiuni sînt mici în comparație cu distanțele reciproce) între care se exercită forțele de interacțiune gravitaționale. Un atom poate fi considerat ca un sistem de particule (nucleu și electroni) considerate puncte materiale, între care se exercită forțe electrice de atracție (nucleu — electroni) sau de respingere (electron — electron).

Tot astfel, un corp oarecare poate fi descompus mintal într-un număr foarte mare de elemente de volum foarte mici care pot fi aproximate prin puncte materiale. Aproximația este bună dacă luăm aceste elemente de volum suficient de mici.

Prin *sistem mecanic* vom înțelege un *sistem de puncte materiale* care nu sînt independente între ele, ci supuse la legături reciproce, astfel că formează un „întreg" mai mult sau mai puțin stabil, mai mult sau mai puțin deformabil.

Sistemul mecanic este un *model al realității* care reflectă mai mult sau mai puțin exact proprietățile mecanice ale corpurilor reale.

4.5.2. **Sistem material.** Mai general, prin sistem material se înțelege orice porțiune din Univers, bine delimitată fie prin frontiere naturale fie mintal, pe care o considerăm și o studiem la un moment dat.

Astfel, un sistem material poate fi: o planetă, o piatră, o mașină, gazul dintr-un vas, sistemul de corpuri reprezentat în figura 4.26, alcătuit din două corpuri legate de capetele unui fir trecut peste un scripete etc.

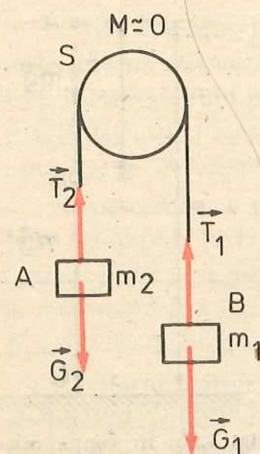


Fig. 4.26. Sistemul material este alcătuit din corpurile A şi B legate de capetele unui fir trecut peste un scripete cu masa neglijabilă. Asupra sistemului acţionează forţele externe $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ şi forţele interne $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$.

Sistemul material este deformabil dacă distanţele dintre părţile sale componente sînt variabile. De exemplu un resort, sistemul solar, sistemul reprezentat în figura 4.26.

Sistemul material este nedeformabil sau rigid dacă distanţele reciproce dintre elementele care îl alcătuiesc nu se modifică în procesul mişcării mecanice.

4.5.3. **Forţe externe.** Odată sistemul ales şi bine precizat, interacţiunea cu restul Universului este luată în considerare prin forţele exercitate de acesta, numite *forţe externe*.

Forţele externe sînt forţele exercitate asupra sistemului din partea corpurilor exterioare care nu fac parte din sistemul considerat.

Vom nota forţele interne cu litera $\vec{\mathcal{F}}$ rond cu indici de exemplu, dacă considerăm sistemul Luna — Pămînt supus atracţiei Soarelui (fig. 4.27), atunci prin $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ am reprezentat rezultantele forţelor externe care se exercită asupra Lunii, respectiv Pămîntului.

4.5.4. **Forţe interne.** Asupra fiecărei particule (părţi) din sistem se exercită atît forţe externe din partea corpurilor care nu fac parte din sistem cît şi forţe interne din partea tuturor celorlalte particule (părţi) din sistem.

Vom nota forţele interne cu litera $\vec{\mathcal{F}}$ rond, cu indici.

Forţele interne sînt forţele de interacţiune dintre punctele materiale (părţile) ale sistemului considerat.

Să analizăm din nou sistemul Lună — Pămînt (fig. 4.27), în care am notat cu $\vec{\mathcal{F}}_{12}$, $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ forţele interne. Forţa $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ este forţa exercitată de Pămînt asupra Lunii, iar $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ este forţa exercitată de Lună asupra Pămîntului. Conform principiului al treilea al dinamicii forţele interne $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ şi $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ sînt egale în modul şi de sens opus:

$$\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21}; \quad \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0.$$

Rezultanta tuturor forţelor interne din sistem este nulă.

4.5.5. **Teorema variaţiei energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale.** Pentru un punct material, energia cinetică are expresia

$$E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

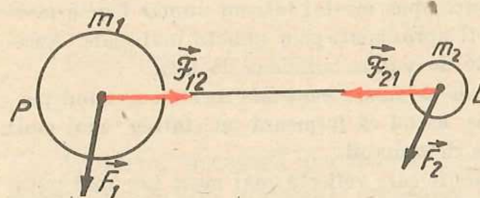


Fig. 4.27. Forţele interne care se exercită între punctele materiale ale unui sistem mecanic sînt două cîte două egale în modul şi de sens opus (acţiunea şi reacţiunea) $\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21}$, de aceea rezultanta lor este nulă: $\vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0$.

Pentru un sistem de puncte materiale, energia cinetică este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor din sistem:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2. \tag{4.33}$$

Vom enunţa, fără a o demonstra, teorema variaţiei energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale.

Între două momente date (t_1 şi t_2) variaţia energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forţelor, atît interioare cît şi exterioare, care acţionează asupra punctelor materiale din sistem.

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{int.} + L_{ext.}. \tag{4.34}$$

În cazul sistemului deformabil, lucrul mecanic al forţelor interioare este, în general, diferit de zero.

În cazul unui solid indeformabil, lucrul mecanic al forţelor interioare este egal cu zero.

Variaţia energiei cinetice a unui solid indeformabil între două momente date este egală cu suma lucrurilor mecanice efectuate între aceste momente de către toate forţele exterioare care acţionează asupra solidului.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un punct material de masă m alunecă fără frecare pe o suprafaţă curbă AB (fig. 4.28). Să se determine viteza punctului material în punctul B, dacă mişcarea se face fără viteză iniţială.

Rezolvare. Sistemul alcătuit din punctul material şi Pămînt (interacţionînd prin cîmpul gravitaţional) este acţionat numai de forţe conservative. Energia mecanică a sistemului în starea A este egală cu energia mecanică a sistemului în starea B:

$$\frac{mv_A^2}{2} + E_{pA} = \frac{mv_B^2}{2} + E_{pB}.$$

Luînd nivelul B, ca nivel de referinţă pentru energia potenţială gravitaţională şi ţinînd seamă că $v_A = 0$, obţinem:

$$mgh = \frac{1}{2} mv_B^2,$$

deci

$$v_B = \sqrt{2gh}.$$

2. Un corp de masă $m = 1$ kg este lăsat să cadă liber de la înălţimea $h = 2$ m, pe un resort cu constanta elastică $k = 200$ N/m (fig. 4.29). Să se calculeze viteza cu care corpul ciocneşte resortul şi deformarea x a resortului.

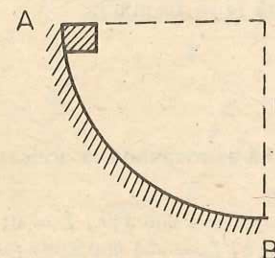


Fig. 4.28. La problema rezolvată 1.

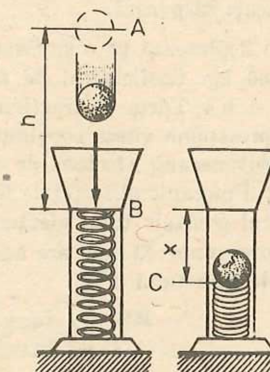


Fig. 4.29. La problema rezolvată 2.

Rezolvare. În sistemul alcătuit din corp, resort și Pămînt acționează două forțe conservative: forța de greutate și forța elastică. Considerăm ca nivele de referință, nivelul B pentru energia potențială elastică și nivelul C pentru energia potențială gravitațională.

Energia mecanică totală la nivelele A, B și C este:

$$E_A = mg(h + x); \; E_B = mgx + \frac{1}{2} mv^2; \; E_C = \frac{1}{2} kx^2. \qquad (4.35)$$

Sistemul fiind izolat aceste energii mecanice sînt egale.

Pentru calculul vitezei la nivelul B folosim primele două relații (4.35) și obținem:

$$mg(h + x) = mgx + \frac{1}{2} mv^2,$$

de unde

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Pentru calculul vitezei vom considera $g = 10$ m/s².

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2} = 6{,}32 \text{ m/s}.$$

Pentru calculul deformării x a resortului vom folosi prima și ultima relația (4.35) și obținem:

$$mg(h + x) = \frac{1}{2} kx^2,$$

sau

$$10x^2 - x - 2 = 0,$$

de unde

$$x = 0{,}5 \text{ m}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Ce lucru mecanic efectuează forța centripetă în timpul unei rotații complete, într-o mișcare circulară uniformă?

R: $L = 0, (\vec{F} \perp \vec{v})$.

2. Un corp se deplasează cu o viteză constantă pe un drum orizontal. Forța rezultantă care acționează asupra corpului este nulă. Se efectuează lucru mecanic asupra corpului? Justificați răspunsul.

3. Un om deplasează pe o suprafață orizontală, pe distanța $d = 10$ m, o ladă cu masa $m = 100$ kg. Coeficientul de frecare dintre ladă și suprafața pe care se deplasează este $\mu = 0{,}4$. Forța de tracțiune are direcția orizontală ($g = 10$ m/s²).

1° Se presupune viteza constantă. Să se calculeze:

a) lucrul mecanic efectuat de om asupra lăzii;

b) lucrul mecanic al forței de frecare;

c) lucrul mecanic total efectuat asupra lăzii.

2° Se presupune că lada are accelerația $a = 0{,}5$ m/s². Să se răspundă la aceleași întrebări ale punctului 1°.

R: 1° *a)* $L_0 = \mu m g d = 4\,000$ J; *b)* $L_r = -4\,000$ J; *c)* $L = 0$;

2° *a)* $L_0 = (\mu mg + ma)d = 4\,500$ J; *b)* $L_r = -4\,000$ J; *c)* $L = 500$ J.

4. Un corp cu masa $m = 20$ kg se deplasează cu viteză constantă pe distanța $d = 60$ m, pe o suprafață orizontală. Coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}45$. Forța aplicată corpului face un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala. Să se calculeze:

a) forța aplicată corpului;

b) lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune asupra corpului ($g = 10$ m/s²).

R: *a)* $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} \approx 83$ N, *b)* $L = Fd\cos\alpha \approx 4\,287$ J.

5. Asupra unui corp acționează o forță $F = 24$ N, care face un unghi $\alpha = 37°$ cu orizontala. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța F pe o distanță $d = 20$ m. Frecările sînt neglijabile ($\cos 37° = 0{,}8$).

R: $L = Fd\cos\alpha = 384$ J.

6. Doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ au mărimile, respectiv $a = 4$ unități convenționale și $b = 8$ unități convenționale. Să se calculeze produsul scalar al celor doi vectori, luînd pentru unghiul α dintre cei doi vectori valorile: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$.

R: 32, $16\sqrt{3}$, $16\sqrt{2}$, 0, -1. (În unități convenționale corespunzătoare.)

7. Să se demonstreze că produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se poate scrie astfel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y,$$

unde (a_x, a_y) și (b_x, b_y) sînt componentele vectorilor pe două axe de coordonate perpendiculare Ox, Oy situate în planul determinat de cei 2 vectori.

8. Să se efectueze produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ reprezentați în figura 4.30, *a*, *b* și *c*. Mărimile vectorilor sînt indicate pe grafic în unități convenționale.

R: *a)* 4,24; *b)* $-4{,}596$; *c)* -6 (În unități convenționale corespunzătoare.)

9. O macara ridică un corp cu masa $m = 300$ kg la înălțimea $h = 5$ m. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de macara în cazurile următoare:

a) corpul este ridicat cu viteză constantă;

b) corpul este ridicat cu accelerația $a = 2$ m/s² ($g = 10$ m/s²).

R: *a)* $L = mgh = 15 \cdot 10^3$ J; *b)* $L = m(g + a)h = 18 \cdot 10^3$ J.

10. Un copil aruncă o minge cu masa $m = 100$ g care se urcă la înălțimea $h = 20$ m. Să se calculeze lucrul mecanic al greutății mingii. Se va lua $g = 10$ m/s².

R: $L = -mgh = -20$ J.

11. Un corp cu masa m se deplasează dintr-un punct A într-un punct C, în cîmpul gravitațional terestru, pe traseul ABC, indicat în figura 4.31. Să se demonstreze că lucrul mecanic efectuat de greutate este egal cu zero.

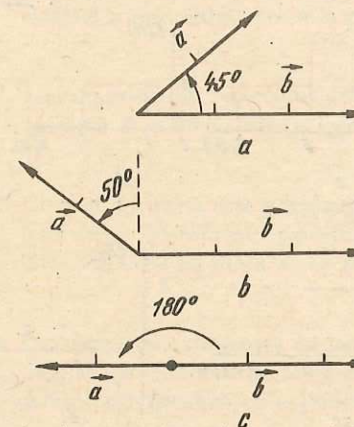


Fig. 4.30. La problema 8.

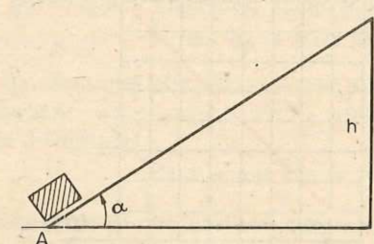


Fig. 4.31. La problema 11.

12. În timp ce un alpinist escaladează peretele vertical al unui munte, un turist de aceeaşi greutate ca şi alpinistul urcă în vîrful muntelui pe o cărare în serpentină şi ajunge în acelaşi loc ca şi alpinistul. Care dintre cei doi a efectuat un lucru mecanic mai mare împotriva gravitaţiei?

R: Efectuează acelaşi lucru mecanic.

13. În figura 4.32 este reprezentată dependenţa alungirii unui resort de mărimea forţei deformatoare. Să se calculeze lucrul mecanic al forţei deformatoare între punctele de abscise 0 cm şi 8 cm. Să se spună care este sensul fizic al tangentei unghiului α şi al ariei triunghiului de sub segmentul OA de pe grafic.

R: $\text{tg}\ \alpha = k$, $L = Fx/2 = 32$ J.

14. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a întinde, cu $\Delta l = 0{,}5$ cm, un resort cu constanta elastică $k = 40$ kN/m?

R: $L = k(\Delta l)^2/2 = 0{,}5$ J.

15. Pentru a întinde un resort cu $\Delta l_1 = 4$ mm, trebuie să se efectueze un lucru mecanic $L_1 = 0{,}02$ J. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a întinde resortul cu $\Delta l_2 = 4$ cm?

R: $L_2 = L_1 (\Delta l_2/\Delta l_1)^2 = 2$ J.

16. Un motor cu puterea $P = 10$ kW este folosit pentru a ridica o sarcină cu masa $m = 500$ kg la înălţimea $h = 40$ m. În cît timp va ridica motorul sarcina respectivă? ($g = 10$ m/s².)

R: $t = mgh/P = 20$ s.

17. În figurile 4.33, *a*, *b*, *c* şi *d* sînt reprezentate dependenţele de distanţă ale forţei F care acţionează asupra unui corp. Să se calculeze lucrul mecanic al forţei în fiecare caz.

R: *a)* 180 J; *b)* 60 J; *c)* 150 J; *d)* 2,5 J.

18. Să se calculeze puterea minimă a unui automobil pentru a se deplasa cu viteza constantă $v = 100$ km/h, dacă forţa de frecare care acţionează asupra automobilului este $F_f = 1{,}8 \cdot 10^3$ N.

R: $P = F_f v = 5 \cdot 10^4$ W.

19. Punctul de aplicaţie al unei forţe $F = 2{,}35$ N se deplasează cu viteză constantă $v = 0{,}456$ m/s, pe direcţia forţei. Care este puterea pusă în joc în această deplasare?

R: $P = Fv = 1{,}07$ W.

20. Depinde energia cinetică de sistemul de referinţă în raport cu care se calculează?

R: Da.

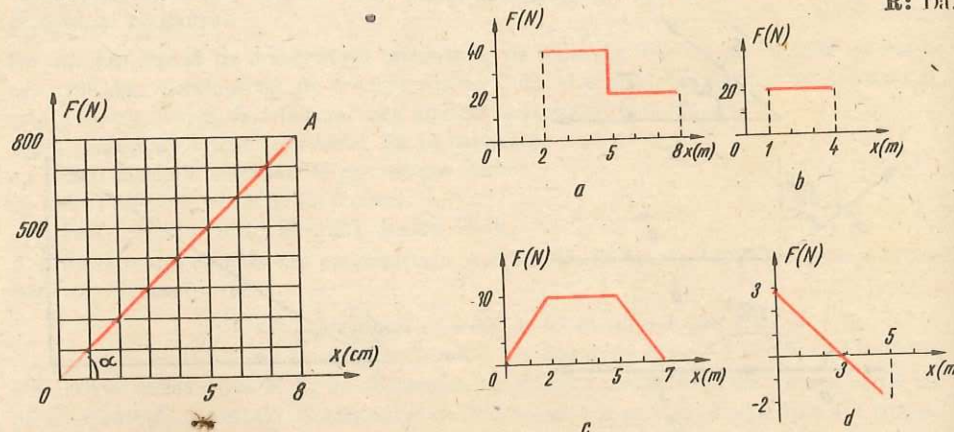


Fig. 4.32. La problema 13.

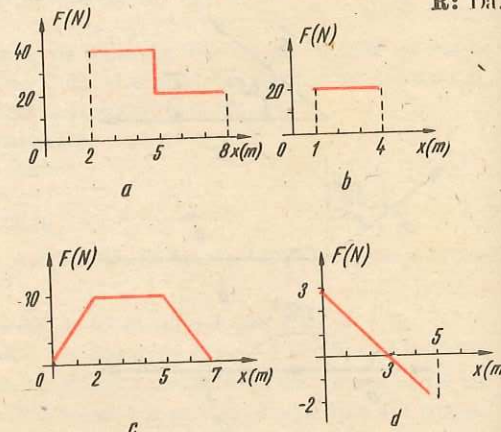


Fig. 4.33. La problema 17.

21. Un om stă pe o bancă într-un autobuz care se deplasează cu viteza $v = 15$ m/s. Masa omului este $m = 70$ kg. Care este energia cinetică a omului în raport cu ceilalţi pasageri? Dar în raport cu Pămîntul?

R: $E_{1c} = 0$; $E_{2c} = 7\ 875$ J.

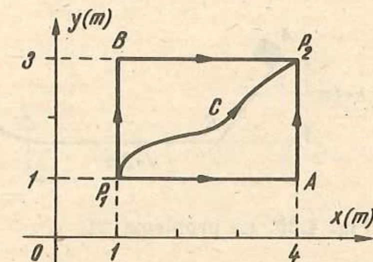


Fig. 4.34. La problema 24.

22. Un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg este aruncat vertical în sus cu viteza $v_0 = 4$ m/s. Să se calculeze: lucrul mecanic al greutăţii, variaţia energiei potenţiale şi variaţia energiei cinetice la urcarea corpului pînă la înălţimea maximă.

R: $L_G = -mv_0^2/2 = -4$ J; $\Delta E_p = 4$ J; $\Delta E_c = -4$ J.

23. O săgeată cu masa $m = 50$ g este lansată, dintr-un arc, cu viteza $v_0 = 30$ m/s pe verticală în sus. Să se calculeze energia cinetică şi energia potenţială a săgeţii după un timp $t = 2$ s de la lansare. Se va lua $g = 10$ m/s².

R: $E_p = mg\,(v_0 t - gt^2/2) = 20$ J; $E_c = m(v_0 - gt)^2/2 = 2{,}5$ J.

24. Un corp cu masa $m = 2$ kg se deplasează din punctul P_1 în punctul P_2 în cîmpul gravitaţional uniform, în care g este constant şi egal cu 10 m/s² (fig. 4.34).

a) Să se calculeze lucrul mecanic al greutăţii pe traiectoriile P_1AP_2 şi P_1BP_2.

b) Dacă se presupune energia potenţială a sistemului corp-Pămînt nulă în P_1, care va fi valoarea sa în P_2?

c) Ce valoare are lucrul mecanic efectuat de cîmp pe traiectoria P_1CP_2?

d) Care este valoarea energiei potenţiale în punctul de coordonate $x = 1$ m şi $y = 3$ m?

R: $L_1 = -40$ J; $L_2 = -40$ J; *b)* $E_p = 40$ J; *c)* $L = -40$ J; *d)* $E_p = 40$ J.

25. Cu cît trebuie alungit un resort cu constanta elastică $k = 20$ N/m pentru ca energia înmagazinată în resort să fie $E_p = 14{,}4$ J?

R: $x = \sqrt{2E_p/k} = 1{,}2$ m.

26. Un corp cu masa $m = 2$ kg alunecă pe o suprafaţă orizontală fără frecare. Corpul ciocneşte un resort pe care-l comprimă cu $x = 0{,}5$ m, înainte de a se opri. Constanta elastică a resortului este $k = 20$ N/m. Care este viteza corpului înainte de ciocnire?

R: $v = x\sqrt{k/m} = 1{,}58$ m/s.

27. La comprimarea resortului unui pistol jucărie cu $x = 3$ cm s-a acţionat cu o forţă maximă $F = 20$ N. Să se calculeze energia potenţială a resortului comprimat.

R: $E_p = Fx/2 = 0{,}3$ J.

28. Un pistol jucărie este prevăzut cu un resort de constantă elastică $k = 800$ N/m. La încărcarea pistolului, resortul a fost comprimat cu $x = 5$ cm. Cu ce viteză este lansat glonţul cu masa $m = 20$ g, pe direcţia orizontală?

R: $v = x\sqrt{k/m} = 10$ m/s.

29. Un vagon de cale ferată cu masa $m = 20$ tone ciocneşte un obstacol cu viteza $v = 0{,}2$ m/s. Resorturile tampoanelor se comprimă fiecare cu $x = 4$ cm. Să se determine forţa maximă ce acţionează asupra resorturilor.

R: $F = mv^2/2x = 10$ kN.

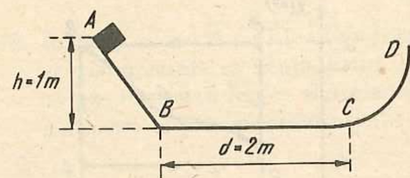


Fig. 4.35. La problema 31.

30. Asupra unui corp acţionează o forţă care variază cu distanţa după legea: $F = 50 - 0,5\ x$, unde x este exprimat în metri şi F în newtoni. Să se calculeze lucrul mecanic al forţei, cînd punctul său de aplicaţie se deplasează între punctele de abscise $x_0 = 0$ m şi $x = 20$ m.

R: $L = \frac{F(x) + F(x_0)}{2}(x - x_0) = 900$ J.

31. Un corp cu masa m ($= 2$ kg) coboară fără frecare pe un plan înclinat de înălţime $h = 1$ m. Ajungînd la baza planului, corpul se deplasează cu frecare pe o suprafaţă plană pînă într-un punct C, parcurgînd distanţa $d = 2$ m. Coeficientul de frecare este $\mu = 0,3$. În punctul C, corpul urcă fără frecare, pe o suprafaţă curbă CD (fig. 4.35). Să se calculeze:

a) viteza v_1 a corpului la baza planului înclinat;

b) viteza v_2 a corpului în punctul C;

c) înălţimea h_1 la care urcă corpul pe suprafaţa CD.

d) Să se determine poziţia punctului în care se opreşte corpul (pe suprafaţa plană), faţă de punctul B. Se va lua $g = 9,8$ m/s^2.

R: *a)* $v_1 = \sqrt{2gh} = 4,47$ m/s; *b)* $v_2 = \sqrt{2g(h - \mu d)} = 2,8$ m/s; *c)* $h_1 = h - \mu d = 0,4$ m; *d)* $d_1 = 2d - h/\mu = 0,66$ m faţă de B.

5

IMPULSUL MECANIC

Am definit impulsul punctului material în § 2.3.2 prin relaţia: $\vec{p} = m\vec{v}$; el are direcţia şi sensul vectorului viteză, iar variaţia sa pe unitatea de timp reprezintă forţa: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ (lex secunda).

5.1. TEOREMA IMPULSULUI PENTRU PUNCTUL MATERIAL. CONSERVAREA IMPULSULUI

Să transcriem ecuaţia (2.12) $\vec{F}_m = \Delta\vec{p}/\Delta t$ sub forma:

$$\vec{F}_m\ \Delta t = \Delta\vec{p} \text{ sau } \vec{F}_m(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \quad (5.1)$$

Produsul $\vec{H} = \vec{F}_m\Delta t$ se numeşte *impulsul forţei*. Ecuaţia (5.1) exprimă *teorema impulsului* pentru punctul material:

Variaţia impulsului punctului material este egală cu impulsul forţei aplicate punctului material.

Dacă impulsul forţei aplicate este zero, de exemplu dacă forţa aplicată este nulă, adică punctul material este *izolat* ($\vec{F} \equiv 0$, $\vec{H} \equiv 0$), variaţia de impuls va fi nulă: $\Delta\vec{p} = 0$, deci impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$ rămîne neschimbat (constant).

Impulsul unui punct material izolat se conservă, $\vec{p}$ = const, *adică punctul material izolat se mişcă rectiliniu uniform sau este în repaus* ($\vec{v}$ = const) (în sisteme de referinţă inerţiale).

Impulsul se poate schimba numai sub acţiunea unei forţe exterioare.

În procesul interacţiunii realizat prin intermediul forţei se face un transfer de mişcare de la un corp la altul, măsurat prin transferul de impuls şi de energie cinetică, adică prin impulsul forţei egal cu variaţia de impuls a corpului,

respectiv prin lucrul mecanic al forței, egal cu variația de energie cinetică a corpului.

Impulsul este o măsură a mișcării. Impulsul punctului material $\vec{p} = m\vec{v}$, este o măsură a mișcării mecanice pe care el o posedă (de aici provine și denumirea de cantitate de mișcare). *Teorema impulsului exprimă o lege de conservare a mișcării materiei.*

Verificarea experimentală a legii impulsului se reduce în fond la verificarea legii fundamentale a dinamicii.

5.2. TEOREMA IMPULSULUI ȘI LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI PENTRU UN SISTEM DE DOUĂ PARTICULE

Fie un sistem format din două particule m_1, m_2 care interacționează între ele. Conform principiului acțiunii și reacțiunii forța $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ exercitată asupra particulei m_1 de către particula m_2 este egală în modul și de sens opus cu forța $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ exercitată asupra particulei m_2 de către particula m_1, adică

$$\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21} \text{ sau } \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0. \qquad (5.2)$$

Cele două forțe acționează de-a lungul dreptei care unește cele două particule (fig. 5.1) și *rezultanta lor este nulă.*

În afară de aceste forțe de interacțiune care constituie forțe interne pentru sistemul nostru, fiecare particulă interacționează în general cu mediul exterior, ceea ce se traduce prin forțele externe: $\vec{F}_1$ asupra particulei m_1, $\vec{F}_2$ asupra particulei m_2 (fig. 5.1). Am notat forțele interne cu $\vec{\mathcal{F}}$ rond.

Să scriem legea impulsului pentru fiecare particulă. Dacă forțele *nu* sînt constante, atunci pentru un interval Δt oarecare trebuie considerate forțele medii pe acel interval, de aceea mai jos toate forțele sînt constante sau medii pe intervalul Δt:

$$(\vec{F}_1 + \vec{\mathcal{F}}_{12})\Delta t = \Delta(m_1\vec{v}_1); \; (\vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{21})\Delta t = \Delta(m_2\vec{v}_2). \qquad (5.3)$$

Adunînd membru cu membru cele două ecuații, găsim:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21})\Delta t = \Delta(m_1\vec{v}_1) + \Delta(m_2\vec{v}_2) = \Delta(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) \qquad (5.4)$$

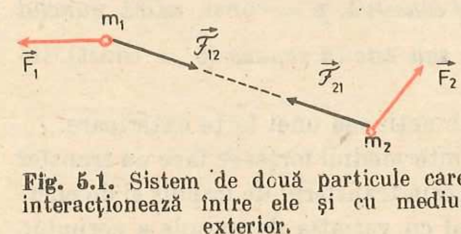


Fig. 5.1. Sistem de două particule care interacționează între ele și cu mediul exterior.

Dar, conform lui (5.2), rezultanta forțelor interne este nulă. Suma vectorială a forțelor externe dă *rezultanta forțelor externe:*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \qquad (5.5)$$

Pe de altă parte, impulsul total al sistemului este suma vectorială a impulsurilor particulelor componente:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \qquad (5.6)$$

Ținînd seama de aceasta, ecuația (5.4) devine:

$$\vec{F}_m \Delta t = \Delta\vec{P}. \qquad (5.7)$$

Impulsul forțelor externe asupra sistemului este egal cu variația impulsului total al sistemului.

Ecuația (5.7) se poate transcrie sub forma cunoscută a legii II:

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}, \quad \left(\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\right) \qquad (5.8)$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forțelor externe și $\vec{P}$ impulsul total al sistemului.

Forțele interne ale sistemului nu contribuie la variația impulsului *total* al sistemului, adică *nu pot schimba impulsul total al sistemului* (rezultanta lor fiind nulă). (Ele pot însă redistribui impulsul între particulele sistemului prin ciocniri.)

Dacă rezultanta forțelor externe este permanent zero sau dacă sistemul este izolat, adică nu interacționează cu mediul exterior, impulsul total se conservă (rămîne constant).

5.3. TEOREMA IMPULSULUI ȘI LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI PENTRU UN SISTEM OARECARE DE PARTICULE

Rezultatele obținute sînt valabile pentru un sistem format dintr-un număr *oarecare* de particule. În adevăr, particulele sistemului interacționează între ele prin forțe interne perechi, două cîte două egale în modul și de sensuri opuse, conform principiului acțiunii și reacțiunii. De aceea, dacă le însumăm pentru întregul sistem, ele se anulează două cîte două și dau rezultantă nulă.

Rezultanta forțelor interne ale unui sistem de particule este nulă.

Scriind legea impulsului pentru fiecare particulă și adunînd ecuațiile membru cu membru, așa cum am făcut pentru un sistem format din două particule, găsim legea impulsului pentru un sistem oarecare:

$$\vec{F}_m \Delta t = \Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1,$$

unde $\vec{F}_m$ este valoarea medie a rezultantei $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ și $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \ldots + \vec{p}_n$ sau sub forma legii II:

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}, \quad \left(\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\right). \qquad (5.9)$$

În aceste legi ale impulsului nu apar decît forțele *externe* care acționează asupra sistemului (cele interne dau rezultantă nulă).

Dacă sistemul este izolat sau dacă rezultanta forţelor externe este permanent nulă, impulsul total al sistemului se conservă.

Această lege este atît de generală şi de importantă încît uneori este formulată şi cunoscută sub numele de *principiul conservării impulsului* pentru sisteme izolate, alături de *principiul conservării energiei*.

Numai prin interacţiune cu mediul exterior se transmite mişcare şi se schimbă impulsul total al sistemului.

Deşi forţele interne nu pot schimba impulsul *total* al sistemului, ele schimbă în general impulsurile *părţilor componente* ale sistemului, adică *redistribuie* impulsul în interiorul sistemului, tocmai ca urmare a interacţiunii dintre *părţile* sistemului.

5.4. CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM DE DOUĂ PARTICULE

Vom introduce acum noţiunea de *centru de masă* (*CM*) al unui sistem — un punct asociat sistemului care caracterizează oarecum „global" distribuţia de masă a sistemului şi se bucură de proprietăţi remarcabile.

Pentru două particule de aceeaşi masă $m_1 = m_2$, centrul lor de masă se află la mijlocul distanţei dintre ele, pe dreapta care uneşte cele două particule. Dacă particulele au mase diferite, centrul lor de masă se va găsi tot pe dreapta care le uneşte, dar mai aproape de particula de masă mai mare şi anume, distanţele *CM* pînă la cele două particule sînt în raport invers cu masele lor (fig. 5.2):

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ sau } m_1 d_1 = m_2 d_2, \text{ de unde } d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d, \text{ unde } d = d_1 + d_2. \quad (5.10)$$

Să găsim vectorul de poziţie $\vec{r}_{CM}$ al centrului de masă. Observăm că $\vec{r}_{CM}$ se compune din $\vec{r}_1$ plus vectorul $\vec{d}_1$ dus din m_1 spre *CM*. Dar $d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$ (5.10), relaţie care se scrie şi vectorial: $\vec{d}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

Rezultă atunci: $\vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

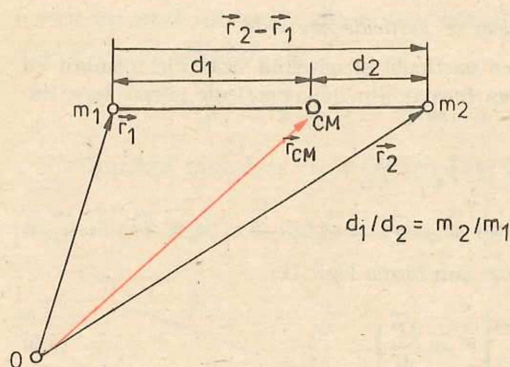


Fig. 5.2. Centrul de masă (*CM*) al unui sistem de două particule.

sau

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.11)$$

Relaţia vectorială (5.11) scrisă pe componente, de exemplu în cazul plan, ne dă coordonatele centrului de masă:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.12)$$

De exemplu, alegînd axa Ox pe direcţia celor două particule (fig. 5.2), cu originea în m_1 şi sensul spre m_2, avem:

$$x_1 = 0, \ x_2 = d \text{ şi } x_{CM} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 d}{m_1 + m_2} = d_1.$$

Vom demonstra două proprietăţi remarcabile ale centrului de masă.

a) Să calculăm viteza centrului de masă. Pentru două momente succesive t, t' avem (notăm $m = m_1 + m_2$ — masa sistemului):

$$m\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2; \ m\vec{r}\,'_{CM} = m_1\vec{r}\,'_1 + m_2\vec{r}\,'_2.$$

De unde prin scădere membru cu membru:

$$m(\vec{r}\,'_{CM} - \vec{r}_{CM}) = m_1(\vec{r}\,'_1 - \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}\,'_2 - \vec{r}_2) \text{ sau } m\Delta\vec{r}_{CM} = m_1\Delta\vec{r}_1 + m_2\Delta\vec{r}_2$$

şi împărţind la intervalul de timp $\Delta t = t' - t$:

$$m\frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = m_1\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}$$

sau

$$m\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}. \quad (5.13)$$

Impulsul total al sistemului este egal cu masa sistemului înmulţită cu viteza centrului de masă.

Observaţie. Centrul de masă se poate defini plecînd de la expresia impulsului total al sistemului. În adevăr, scriind impulsul total al sistemului astfel:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1)}{\Delta t} + \frac{\Delta(m_2\vec{r}_2)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{\Delta t} = m\frac{\Delta\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m}\right)}{\Delta t}, \ (m = m_1 + m_2),$$

se vede că punctul definit prin vectorul de poziţie:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

are proprietatea remarcabilă că viteza sa înmulţită cu masa sistemului ne dă impulsul total, *ca şi cum* toată masa sistemului ar fi concentrată în centrul de masă şi s-ar mişca cu viteza acestuia.

b) Să calculăm acceleraţia centrului de masă:

$$m\vec{v}_{CM} = \vec{P}, \ m\vec{v}\,'_{CM} = \vec{P}\,', \ m(\vec{v}\,'_{CM} - \vec{v}_{CM}) = \vec{P}\,' - \vec{P},$$

$$m\Delta\vec{v}_{CM} = \Delta\vec{P}, \ m\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

şi ţinînd seama de (5.8):

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}. \quad (5.14)$$

Rezultanta forțelor externe este egală cu masa sistemului înmulțită cu accelerația centrului de masă.

Prin urmare, centrul de masă se comportă *ca* un punct material avînd masa egală cu masa sistemului și supus forțelor externe, *ca și cum* întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM și forțele externe ar acționa în CM.

Dacă sistemul este *izolat* (sau rezultanta forțelor *externe* este nulă), centrul de masă va fi în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă.

5.5. CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM OARECARE DE PARTICULE

Formula (5.11) se generalizează ușor pentru un sistem format dintr-un număr oarecare de particule.

Fie 3 particule. Calculăm întîi centrul de masă a două particule, de exemplu $\vec{r}_{12} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ și, înlocuindu-le cu o singură particulă de masă $(m_1 + m_2)$ situată în $\vec{r}_{12}$, calculăm centrul de masă dintre aceasta și particula m_3:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r}_{12} + m_3\vec{r}_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Procedînd astfel din aproape în aproape obținem în general:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k. \tag{5.15}$$

Dacă un corp *omogen* posedă un plan de simetrie, atunci grupînd ca mai sus două cîte două particulele identice simetrice (situate de o parte și de alta a planului de simetrie), găsim că CM se află în planul de simetrie. La fel se întîmplă în cazul unei axe de simetrie sau în cel al centrului de simetrie.

Dacă un corp omogen posedă un plan de simetrie, o axă de simetrie sau un centru de simetrie, centrul său de masă se va găsi în planul de simetrie, pe axa de simetrie sau în centrul de simetrie.

De exemplu, CM al unui cilindru omogen se află pe axa sa; CM al unei sfere omogene se află în centrul sferei; CM al unui paralelipiped dreptunghic se află în centrul paralelipipedului; CM al unui disc omogen subțire se află în centrul discului; CM al unei plăci omogene dreptunghiulare este în centrul ei.

Subliniem că CM este un punct geometric asociat sistemului, a cărui poziție este determinată de *distribuția* masei. În CM poate să nu fie deloc masă, ca în cazul unui inel omogen.

În formula (5.15) putem grupa termenii sumei corespunzători unui subsistem și înlocui cu masa subsistemului (M) înmulțită cu vectorul de poziție al CM corespunzător al subsistemului ($\vec{R}$):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_j M_j\vec{R}_j, \tag{5.16}$$

unde M_j sînt masele subsistemelor și $\vec{R}_j$ vectorii de poziție ai centrelor lor de masă.

Formula (5.16) se scrie pe componente într-un sistem de coordonate convenabil.

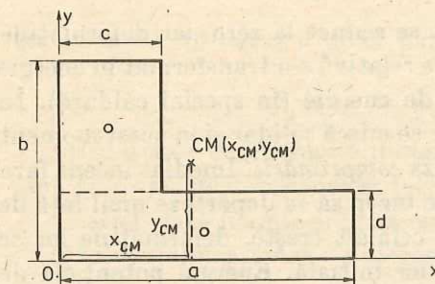


Fig. 5.3. Calculul poziției centrului de masă (CM) al unei plăci omogene.

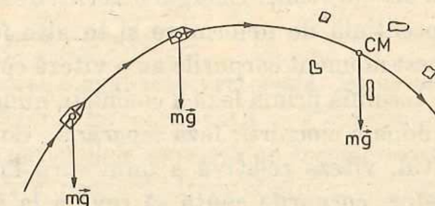


Fig. 5.4. Centrul de masă al unui obuz continuă să se miște după explozie, ca centru de masă al schijelor, neperturbat pe parabolă (în vid).

EXEMPLU

Să se calculeze CM al plăcii omogene din figura 5.3.

Rezolvare. Placa fiind *omogenă*, masele sînt proporționale cu ariile și în (5.16) putem folosi ariile respective. Alegînd axele ca în figură, avem

$$x_{CM} = \frac{ad \cdot \frac{a}{2} + (b-d)c \cdot \frac{c}{2}}{ad + (b-d)c}, \quad y_{CM} = \frac{ad \cdot \frac{d}{2} + (b-d)c \cdot \left(d + \frac{b-d}{2}\right)}{ad + (b-d)c}.$$

Cele două teoreme privind CM, de la § 5.3, rămîn valabile și în cazul unui sistem oarecare. Astfel, de exemplu, *dacă rezultanta forțelor externe este zero (sau dacă sistemul este izolat), centrul său de masă va fi în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă,* deși părțile sistemului se pot mișca accelerat.

Mișcarea centrului de masă este dictată de forțele *externe, forțele interne nu influențează mișcarea centrului de masă.* De exemplu, dacă un obuz care se mișcă liber în vid (sub acțiunea greutății) explodează la un moment dat, centrul său de masă continuă să se miște, ca centru de masă al schijelor, neperturbat pe parabolă, ca și cum nimic nu s-a întîmplat, pînă cînd măcar una din schije atinge pămîntul și apare o forță externă care va devia CM de pe parabolă (fig. 5.4).

Într-un cîmp gravitațional *omogen* centrul de masă coincide cu centrul de greutate (punctul de aplicație al rezultantei forțelor de greutate).

5.6. CIOCNIRI

Prin *ciocnirea* a două sau mai multe corpuri se înțelege un *proces de interacțiune care durează un timp finit,* astfel încît atît înainte, cît și după ciocnire corpurile nu interacționează. La ciocnirea corpurilor macroscopice interacțiunea durează atît timp cît corpurile sînt în contact și acest timp de contact este foarte scurt față de duratele obișnuite (timpul de contact este de ordinul milisecundelor).

La ciocnirea a două corpuri (macroscopice) putem distinge două faze sau etape. Imediat ce corpurile vin în contact începe frînarea lor reciprocă, bruscă, și deformarea lor. Energia cinetică de mișcare relativă a unui corp față de celălalt se transformă, prin lucrul mecanic al forțelor interne de ciocnire, în energie potențială de deformare a corpurilor. La un moment dat

viteza relativă a unui corp față de celălalt se reduce la zero, iar deformațiile lor sînt maxime. Energia cinetică de mișcare relativă s-a transformat în energie potențială de deformare și în alte forme de energie (în special căldură). În acest moment corpurile au o viteză comună, se mișcă solidar și în acest moment se termină prima fază a ciocnirii, numită faza *comprimării*. Imediat începe faza a doua a ciocnirii: faza *separării*. Corpurile încep să se depărteze unul față de altul, viteza relativă a unui corp față de celălalt crește, deformațiile lor se reduc, corpurile caută să revină la forma lor inițială. Energia potențială de deformare se transformă parțial în energie cinetică de mișcare relativă a corpurilor. În momentul cînd se separă complet, se termină faza decomprimării sau separării.

La ciocnirea unor corpuri elastice (bile de oțel, bile de fildeș), deformațiile dispar după ciocnire, corpurile își recapătă forma lor inițială, energia cinetică „relativă" se restituie aproape integral și ciocnirea se cheamă *elastică*. Dar, în general, după ciocnire rămîn deformații *remanente*, de exemplu la bilele de plumb sau de plastilină.

În timpul ciocnirii apar forțe de interacțiune mari între corpurile care se ciocnesc, dar aceste forțe durează foarte puțin, atîta timp cît durează ciocnirea (contactul dintre corpuri). Conform principiului acțiunii și reacțiunii, forțele cu care acționează cele două corpuri, unul asupra celuilalt, sînt egale în modul și de sensuri opuse (fig. 5.5). Forțele normale se datoresc deformării elastice reciproce a celor două corpuri, iar forțele tangențiale se datoresc frecării dintre corpuri în planul de contact (întrepătrunderii asperităților sau rugozităților suprafețelor în contact).

Pentru sistemul format din cele două corpuri forțele care apar în procesul ciocnirii sînt forțe *interne* și dau rezultantă *nulă*. Prin urmare aceste forțe *nu* pot schimba impulsul *total* al celor două corpuri, dar îl *redistribuie* între cele două corpuri. De exemplu, dacă un vagonet lovește un altul aflat în repaus, acesta din urmă va căpăta un impuls pe seama impulsului primului corp: *avem un transfer de mișcare mecanică și de impuls de la un corp la altul prin ciocnire.*

În timpul foarte scurt cît durează ciocnirea, forțele externe obișnuite (de exemplu forțele de frecare sau forțele de greutate) nu pot modifica sensibil impulsul total al sistemului. De aceea chiar dacă corpurile care se ciocnesc sînt supuse la forțe externe, putem totuși scrie conservarea impulsului total al sistemului în sensul următor:

Suma vectorială a impulsurilor corpurilor imediat înainte de ciocnire trebuie să fie egală cu suma vectorială a impulsurilor corpurilor imediat după ciocnire:

$$\vec{P}_{inițial} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... = \vec{P}_{final} = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' + ... \qquad (5.17)$$

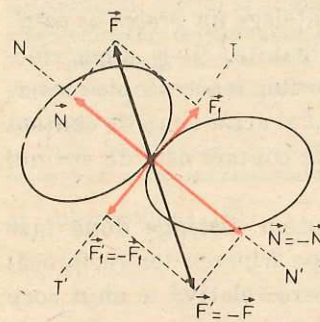


Fig. 5.5. Forțele care apar la ciocnirea a două corpuri.

De exemplu, în cazul a două particule:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'. \qquad (5.18)$$

Ecuația de conservare a impulsului este o egalitate vectorială. Ea se scrie pînă la urmă pe componente într-un sistem de coordonate ales convenabil.

Astfel, dacă înainte și după ciocnire particulele se mișcă pe *aceeași dreaptă* — cazul *unidimensional* — alegem această dreaptă drept axă Ox și atunci ecuația de conservare a impulsului devine:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2', \qquad (5.19)$$

unde vitezele inițiale v_1, v_2 și cele finale v_1', v_2', pot fi pozitive sau negative după cum particulele se mișcă în sensul pozitiv ales sau cel negativ al axei.

5.6.1. **Ciocnirea plastică (total neelastică).** Un caz particular important al ciocnirilor este ciocnirea *total neelastică* sau *plastică*. În acest caz, prin ciocnire corpurile *se cuplează*, se lipesc și își continuă mișcarea împreună, cu aceeași viteză comună. Exemple: cînd aruncăm o piatră într-un vagonet sau alergăm după un vagonet (tramvai, barcă) și sărim în el sau cînd un glonț rămîne înfipt într-o țintă sau un obiect fragil cade jos pe podea etc. Reversul acestor ciocniri este cazul descompunerii sau desfacerii unui corp în mai multe fragmente (de exemplu cazul exploziei unui obuz). Dacă filmăm acest proces și proiectăm filmul în sens invers, obținem exact cazul ciocnirii plastice; și invers, o ciocnire plastică filmată și proiectată în sens invers apare ca o dezagregare, descompunere sau explozie. De aceea și aceste procese de descompunere pot fi înglobate în categoria de ciocniri plastice. De exemplu, sărim din mers dintr-un vagonet (cărucior, barcă) sau aruncăm dintr-un vagonet sau barcă diferite obiecte etc. În toate aceste cazuri se aplică evident legea conservării impulsului.

Fie două particule cu masele m_1, m_2 și vitezele $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ care se ciocnesc plastic. Înainte de ciocnire avem două corpuri cu impulsurile $m_1\vec{v}_1$, $m_2\vec{v}_2$, iar după ciocnire avem un singur corp de masă $m_1 + m_2$ și viteză $\vec{v}'$. Scriem legea conservării impulsului total:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}', \text{ de unde } \vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5.20)$$

Viteza finală se poate afla și grafic. Reprezentăm la o anumită scară vitezele și impulsurile (fig. 5.6). Compunem vectorial impulsurile $m_1\vec{v}_1$ și $m_2\vec{v}_2$ (după regula paralelogramului) și rezultatul îl împărțim la masa totală $m_1 + m_2$.

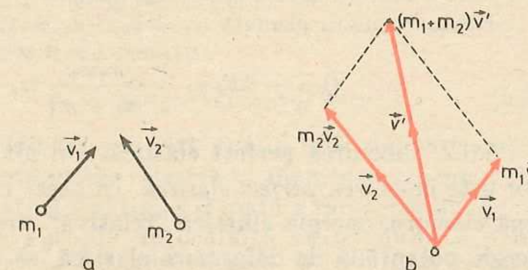


Fig. 5.6. Ciocnirea plastică a două particule.

În cazul *unidimensional* formula (5.20) devine

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{5.21}$$

În ciocnirea plastică o parte din energia cinetică a corpurilor se transformă în alte forme de energie (în special în căldură):

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_2 + m_1) v'^2 + Q,$$

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2. \tag{5.22}$$

Introducînd aici pe v' din (5.21), obținem:

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} m_r v_r^2, \tag{5.23}$$

unde $v_r = v_1 - v_2$ este viteza relativă (a particulei 1 față de particula 2), iar m_r se numește masa redusă a celor două particule. Prin urmare, numai energia cinetică de mișcare relativă (a unei particule față de alta) dispare prin cuplarea particulelor, transformîndu-se în alte forme de energie.

EXEMPLU

Două cărucioare de mase $m_1 = 1{,}00$ kg, $m_2 = 2{,}00$ kg se mișcă unul spre celălalt cu vitezele $v_1 = 1{,}00$ m/s, $v_2 = -2{,}00$ m/s. Prin ciocnire cărucioarele se cuplează (ciocnire plastică). Care va fi viteza lor comună după ciocnire și energia cinetică pierdută?

Rezolvare. Am ales axa Ox în sensul mișcării primului cărucior, de aceea viteza v_2 este negativă. Scriem conservarea impulsului:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v', \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v' = \frac{1{,}00 \text{ kg} \cdot 1{,}00 \text{ m/s} - 2{,}00 \text{ kg} \cdot 2{,}00 \text{ m/s}}{1{,}00 \text{ kg} + 2{,}00 \text{ kg}} = -1{,}00 \text{ m/s}.$$

Semnul minus arată că după ciocnire și cuplare cărucioarele se vor mișca în sensul negativ al axei alese Ox, adică în sensul vitezei inițiale a celui de-al doilea cărucior (care a avut un impuls inițial mai mare).

Energia cinetică pierdută ($v_r = v_1 - v_2 = 1{,}00 - (-2{,}00) = 3{,}00$ m/s):

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = 3{,}00 \text{ J}.$$

5.6.2. **Ciocnirea perfect elastică.** Un alt caz particular simplu al ciocnirilor este ciocnirea *perfect elastică*. În acest caz deformațiile corpurilor dispar după ciocnire, energia cinetică „relativă", transformată în timpul ciocnirii în energie potențială de deformare elastică, se restituie integral în energie cinetică după ciocnire.

Ciocnirea este perfect elastică dacă energia cinetică a corpurilor se conservă prin ciocnire, adică energia cinetică totală a corpurilor înainte de ciocnire este egală cu energia cinetică totală a corpurilor după ciocnire:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \tag{5.24}$$

Bineînțeles, mai avem și ecuația de conservare a impulsului total:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'. \tag{5.25}$$

În natură nu există *riguros* ciocnire *perfect* elastică între corpuri macroscopice, dar de multe ori corpurile elastice (de exemplu bilele de fildeș, de oțel, cărucioarele prevăzute cu tampoane-resorturi elastice) la ciocniri ușoare verifică bine condiția (5.24).

De obicei cunoaștem masele și vitezele inițiale ale corpurilor și vrem să aflăm vitezele lor finale. Avem o ecuație de conservare a energiei cinetice (5.24) și trei ecuații algebrice (pe componente) de conservare a impulsului (5.25), deci 4 ecuații, și $3 + 3 = 6$ necunoscute pentru componentele vitezelor finale. Prin urmare, în cazul general al ciocnirii *în spațiu* a două particule, datele și ecuațiile de mai sus nu sînt suficiente. În cazul ciocnirii în *plan* vom avea $1 + 2 = 3$ ecuații și $2 + 2 = 4$ necunoscute, deci trebuie să mai cunoaștem o dată asupra ciocnirii.

În cazul *unidimensional*, cînd atît înainte, cît și după ciocnire particulele se mișcă pe *aceeași dreaptă* pe care o alegem drept axă Ox, avem două ecuații de conservare și două necunoscute:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2, \tag{5.26}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{5.27}$$

Sistemul se rezolvă astfel. Trecem termenii care conțin pe m_1 în stînga și pe cei care conțin pe m_2 în dreapta:

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

sau

$$m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2),$$

și

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2).$$

Împărțim membru la membru cele două ecuații:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \text{ sau } v_r' = v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2) = -v_r. \tag{5.28}$$

Aici $v_1' - v_2'$ reprezintă viteza *relativă* v_r', a particulei *1* față de particula *2*, după ciocnire, iar $v_1 - v_2$ reprezintă viteza relativă v_r înainte de ciocnire. Prin urmare, în ciocnirea perfect elastică unidimensională a două particule una din ele (de exemplu prima) se apropie de cealaltă cu o anumită viteză relativă $v_r = v_1 - v_2$, o lovește și se întoarce înapoi cu o viteză relativă egală în modul dar de semn schimbat.

Ecuaţia (5.28) împreună cu ecuaţia de conservare a impulsului (5.27) ne permite să aflăm imediat vitezele finale v_1', v_2' după ciocnirea perfect elastică unidimensională a două particule:

$$v_1' = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1, \quad v_2' = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_2. \qquad (5.29)$$

Discuţie: a) Dacă particula *2* era în repaus înainte de ciocnire ($v_2 = 0$), obţinem:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}v_1, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1. \qquad (5.30)$$

Se vede că în acest caz corpul *2* va căpăta o viteză v_2' în sensul în care este lovit (v_2' este de acelaşi semn cu v_1), în timp ce primul corp se poate întoarce înapoi dacă masa sa m_1 este mai mică decît a celui de-al doilea corp.

b) Dacă masele sînt egale, din (5.29) rezultă că $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$, corpurile schimbă vitezele între ele, ca şi cum ar trece unul pe lîngă celălalt fără să se atingă, unul luînd locul celuilalt. În aceleaşi condiţii (adică $m_1 = m_2$), dacă al doilea corp era în repaus ($v_2 = 0$), atunci primul corp se opreşte ($v_1' = 0$), iar al doilea porneşte cu viteza primului ($v_2' = v_1$). Aceste rezultate sînt frumos ilustrate de următorul experiment.

EXPERIMENT

Suspendăm două bile identice pe fire paralele egale (fig. 5.7). Dacă deviem o bilă cu un anumit unghi şi îi dăm drumul să se ciocnească cu cealaltă, atunci prin ciocnire prima se va opri, iar a doua va fi deviată aproape cu acelaşi unghi ca prima. După aceasta, bila a doua se întoarce înapoi şi o loveşte pe prima, oprindu-se la rîndul ei, şi aşa mai departe pînă ce mişcarea se stinge sau se strică (bilele nu mai rămîn în acelaşi plan vertical, dacă nu sînt perfect centrate sau dacă nu sînt suspendate fiecare prin 2 fire în forma literei V).

Dacă acum bila deviată are masă mai mare decît cea aflată în repaus, atunci după ciocnire ea va devia în continuare; dacă are masă mai mică, ea va fi deviată înapoi.

Observăm că în orice fel de ciocnire impulsul total al sistemului (izolat) se conservă, fiindcă rezultanta forţelor interne de ciocnire este totdeauna zero (principiul III), în timp ce energia cinetică totală în general nu se conservă, fiindcă lucrul mecanic al forţelor interne nu este în general zero şi

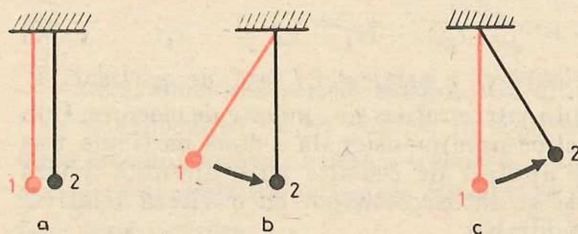


Fig. 5.7. Ciocnirea a două bile identice, dintre care una este în repaus

atunci o parte din energia cinetică se transformă în *alte* forme de energie (căldură sau alte forme disipate în mediu). În cazul exploziilor (descompunerilor) se creează energie cinetică pe seama altor forme ale energiei interne (chimică etc.). Bineînţeles, energia *totală* a sistemului izolat se conservă (principiul conservării energiei).

5.6.3. **Ciocnirea cu un perete.** În copilărie ne-am jucat cu mingea, aruncînd-o pe podea sau pe perete şi apoi prinzînd-o. Observaţii simple ne arată că dacă aruncăm mingea perpendicular pe perete (sau pe podea), ea se întoarce înapoi tot perpendicular pe perete cu o viteză egală în modul, dar de semn schimbat, faţă de viteza iniţială.

În teoria ciocnirilor se înţelege prin *ciocnirea cu un perete — ciocnirea cu un corp de masă foarte mare, astfel încît viteza acestuia nu se schimbă prin ciocnire.*

Acesta este cazul ciocnirii unei mingi cu podeaua sau cu un perete (eventual mobil) sau cazul ciocnirii unei molecule de gaz cu pereţii vasului în care se găseşte gazul sau cu pistonul (mobil) dacă gazul se află într-un cilindru cu piston.

Să considerăm ciocnirea perfect elastică (unidimensională) cu un corp de masă m_2 foarte mare (faţă de m_1). Să transcriem atunci formulele (5.29) sub următoarea formă:

$$v_1' = 2\frac{\frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} - v_1; \quad v_2' = 2\frac{\frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} - v_2. \qquad (5.31)$$

Dacă masa m_2 este foarte mare, atunci fracţia $\frac{m_1}{m_2}$ va fi foarte mică şi pentru m_2 extrem de mare, fracţia m_1/m_2 se va micşora pînă la zero. Atunci formulele de mai sus devin (punînd $m_1/m_2 = 0$):

$$v_1' = 2v_2 - v_1, \qquad v_2' = v_2, \qquad (5.32)$$

adică în adevăr viteza peretelui (de masă m_2) nu se schimbă prin ciocnire ($v_2' = v_2$). Prima formulă se obţine şi direct din condiţia (5.28) pentru viteza relativă în ciocnirea perfect elastică unidimensională, dacă punem, $v_2' = v_2$.

În cazul cînd peretele este în repaus ($v_2 = 0 = v_2'$), obţinem rezultatul aşteptat: $v_1' = -v_1$, adică particula se întoarce înapoi (ricoşează) cu aceeaşi viteză în modul (fig. 5.8, *a*).

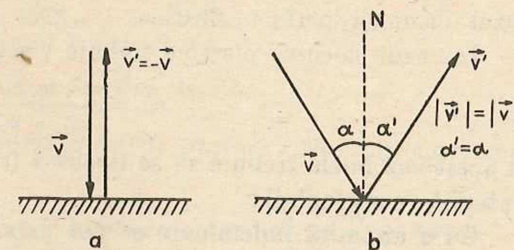


Fig. 5.8. Ciocnirea perfect elastică cu un perete în repaus: *a)* frontală, *b)* oblică.

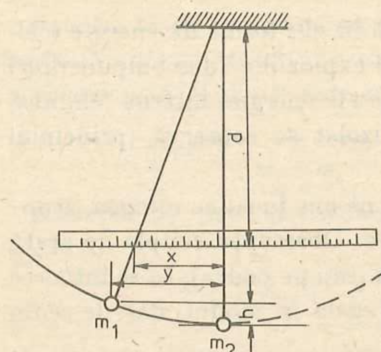


Fig. 5.9. Dispozitiv pentru verificarea legilor de conservare la ciocniri.

În sfîrșit, dacă particula lovește oblic și perfect elastic un perete aflat în repaus, ea ricoșează sub un unghi de „reflexie" α', egal cu unghiul de „incidență" (de cădere) α și cu viteza $\vec{v}'$ este egală în modul cu viteza $\vec{v}$ (fig. 5.8, *b*):

$$|\vec{v}'| = |\vec{v}|, \ \alpha' = \alpha. \tag{5.33}$$

Verificarea experimentală a legilor de conservare la ciocniri se poate face de exemplu cu dispozitivul simplu din figura 5.9.

Două bile de mase m_1, m_2 cunoscute sînt suspendate pe fire paralele apropiate, de lungime $l(\sim 50$ cm). Bila m_1 este deviată, astfel încît firul său de suspensie să se deplaseze cu o distanță $x(\sim 5$ cm), măsurată pe o riglă gradată; bila m_2 rămîne în repaus. După ciocnire notăm iarăși distanțele x_1', x_2' cu care deviază firele de suspensie ale bilelor.

Viteza imediat înainte sau imediat după ciocnire se exprimă prin înălțimea respectivă $h : v = \sqrt{2gh}$ (fig. 5.9). Conform figurii 5.9, din asemănarea triunghiurilor dreptunghice rezultă:

$$\frac{y}{x} = \frac{l-h}{d}, \text{ dar } y = \sqrt{l^2 - (l-h)^2} = \sqrt{h(2l-h)}.$$

Considerînd devieri cu unghiuri mici, deci $h \ll l$, putem scrie aproximativ (neglijînd pe h față de l și $2l$):

$$\frac{y}{x} \cong \frac{l}{d}, \quad y \cong \sqrt{2hl}, \text{ de unde } \sqrt{2h} \cong \frac{x}{d}\sqrt{l}$$

și deci viteza

$$v = \sqrt{2gh} \cong x\frac{\sqrt{gl}}{d} = Cx,$$

unde (5.34)

$$C = \frac{\sqrt{gl}}{d},$$

este constanta aparatului pe care o calculăm de la bun început.

Alegînd o deviație x_1 și măsurînd deviațiile x_1' și x_2', calculăm vitezele v_1' și v_2' cu (5.34) și le comparăm cu vitezele teoretice calculate cu (5.30) în cazul ciocnirii perfect elastice.

În cazul ciocnirii plastice trebuie verificată relația ($v_2 = 0$):

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{5.35}$$

În acest caz, bilele trebuie să se lipească (cupleze) (bile din plastilină sau alt material convenabil).

Cu o anumită îndemînare se pot măsura direct înălțimile h cu ajutorul unei rigle așezate vertical pe masă în dreptul bilei respective.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp de masă $m = 10{,}0$ kg, avînd viteza inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s, este frînat cu o forță constantă $F = 50$ N (pe aceeași direcție cu viteza). Să se afle timpul pînă la oprirea corpului.

Rezolvare. Scriem legea impulsului: $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$. Dacă Δt este timpul pînă la oprire, atunci viteza finală $v = 0$ (condiția de oprire) și proiectînd ecuația pe axa mișcării:

$$F\Delta t = 0 - mv_0, \quad \Delta t = \frac{mv_0}{F} = \frac{10{,}0 \text{ kg} \cdot 10{,}0 \text{ m/s}}{50 \text{ N}} = 2{,}0 \text{ s}.$$

Analog, dacă un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0, atunci forța de greutate îl frînează și timpul de urcare va fi: $t_u = mv_0/mg = v_0/g$ (rezultat cunoscut).

2. O minge cu masa $m = 0{,}100$ kg lovește frontal un perete cu viteza $v = 5{,}0$ m/s. Dacă timpul de contact cu peretele este $\Delta t = 1{,}0$ ms, să se afle forța medie care apare la contactul dintre minge și perete.

Rezolvare. Să scriem legea impulsului pentru minge (fig. 5.8, *a*): $\vec{F}_m\Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v}$. Dar $\vec{v}' = -\vec{v}$ din condiția de ciocnire perfect elastică, atunci $\vec{F}_m\Delta t = -2m\vec{v}$, $\vec{F}_m = -\frac{2m\vec{v}}{\Delta t}$. Prin urmare, forța exercitată asupra mingii din partea peretelui este perpendiculară pe perete și de sens opus vitezei inițiale și are valoarea:

$$F_m = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 0{,}100 \text{ kg} \cdot 5{,}0 \text{ m/s}}{1{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 1{,}0 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

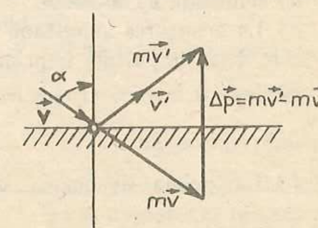


Fig. 5.10. Variația impulsului la ciocnirea oblică perfect elastică cu un perete în repaus (problema rezolvată 2).

Dacă mingea lovește oblic peretele (fig. 5.10), atunci variația impulsului se obține prin scăderea *vectorială*: $\Delta\vec{p} = m\vec{v}' - m\vec{v}$ (fig. 5.10).
În valoarea absolută

$$|\Delta\vec{p}| = 2\,mv\cos\alpha, \ F_m = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} \tag{5.36}$$

și forța este de asemenea perpendiculară pe perete.

3*. Un elev stă pe un cărucior aflat în repaus și ține în mîini două bile, fiecare de masă $m = 2{,}00$ kg. Masa elevului și a căruciorului este $M = 60{,}0$ kg. Elevul imprimă bilelor o viteză $u = 3{,}1$ m/s relativă la el *înainte* de aruncare (ceea ce înseamnă că imprimă bilelor același impuls $F\Delta t = m\,v_{final} - m\,v_{inițial} = m\,u$). Care va fi viteza finală a căruciorului, dacă elevul aruncă bilele în același sens: *a)* simultan, *b)* succesiv? Cîtă energie cinetică creează elevul?

Rezolvare. a) La aruncarea simultană:

$$0 = Mv' + 2mu, \quad v' = -\frac{2m}{M}u = -\frac{0{,}62}{3} = -0{,}21 \text{ m/s};$$

$$\Delta E_c = \frac{m}{M}(M + 2m)u^2 = 20{,}5 \text{ J}.$$

Viteza imprimată căruciorului este opusă vitezei de aruncare a bilelor (semnul minus)
b) La prima aruncare:

$$0 = (M + m)v_1 + mu, \ v_1 = -\frac{m}{M+m}u; \ \Delta E_{c1} = \frac{1}{2}mu^2\frac{M+2m}{M+m} = 9{,}92 \text{ J},$$

La a doua aruncare: $(M + m)v_1 = Mv_2 + m(v_1 + u)$,

$$v_2 = v_1 - u\frac{m}{M} = -\frac{m(2M+m)}{M(M+m)}u = -\frac{0,61}{3} = -0,20 \text{ m/s}, \; |v'| > |v_2|;$$

$$\Delta E_{c2} = \frac{1}{2} mu^2 \frac{M+m}{M} = 9,93 \text{ J}.$$

În toate ecuațiile de conservare a impulsului vitezele corpurilor trebuie luate față de *același* sistem de referință (Pămîntul), de aceea în ultima ecuație apare viteza bilei $v_1 + u$ față de Pămînt, fiindcă bila are deja viteza căruciorului v_1 la care se adaugă viteza u imprimată față de cărucior. Se poate scrie ecuația a doua și față de sistemul de referință care se mișcă cu viteza v_1 a căruciorului: $0 = Mv_2' + mu$, unde v_2' este a doua viteză a căruciorului față de prima viteză v_1. Atunci față de Pămînt: $v_2 = v_1 + v_2'$ și regăsim rezultatul de mai sus.

Să reluăm problema, dar considerînd că elevul aruncă bilele în sensuri opuse: *a)* simultan, *b)* succesiv.

a) La aruncarea simultană: $0 = Mv' + mu - mu$, $v' = 0$, ceea ce era de așteptat; cele două impulsuri imprimate se compensează fiind egale în modul și de sensuri opuse:

$$\Delta E_c = mu^2 = 19,22 \text{ J}.$$

b) La prima aruncare: $0 = (M + m)v_1 + mu$, $v_1 = -\frac{m}{m+M}u$ și la a doua aruncare:

$$(M + m)v_1 = Mv_2 + m(v_1 - u), \; v_2 = v_1 + \frac{m}{M}u = \frac{m^2u}{M(M+m)} = \frac{1}{300}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,0033 \text{ m/s},$$

deci căruciorul va căpăta pînă la urmă o viteză în sensul primei aruncări, ceea ce era de așteptat deoarece a doua aruncare are efect mai puternic asupra căruciorului, acesta avînd acum o masă mai mică. Energiile cinetice create sînt aceleași ca la aruncarea succesivă în același sens.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un meteorit arde în atmosferă, fără a ajunge la suprafața Pămîntului. Unde dispare impulsul său?

R: parțial în particulele de ardere, parțial în moleculele de aer lovite.

2. Un disc omogen se rotește în jurul axei sale fixe. Care este impulsul său total?

R: zero.

3. Cum s-ar putea întoarce un cosmonaut, ieșit în spațiul cosmic, înapoi la nava cosmică, dacă cablul care-l leagă de navă se rupe, știind că cosmonautul are cu el o trusă de instrumente?

R: aruncă instrumentele în sensul opus.

4. Pe o scîndură stă un om. Cum se va încovoia scîndura în primul moment cînd omul brusc se ghemuiește? Dar dacă, odată ghemuit, se ridică brusc?

R: se ridică; coboară.

5. Întîmplarea povestită de Münchhausen că ar fi ieșit dintr-o mlaștină (cu cal cu tot) trăgîndu-se cu putere de păr în sus poate fi adevărată?

R: nu.

6. Poate un om să se ridice pe el însuși, trăgînd de un capăt al unei sfori, care este trecută peste un scripete (cu axă orizontală fixă) și legată cu celălalt capăt la brîul său? Cu ce forță trebuie să tragă de sfoară?

R: $F = G/2$.

7. S-ar putea propulsa o barcă cu pînze, suflînd aer spre pînze cu ajutorul unui ventilator instalat în barcă? Dar dacă suflăm alături de pînze (adică fără a nimeri în pînze)?

R: nu; da.

8*. Deși forțele interne ale unui sistem nu pot modifica impulsul *total* (rezultant) al sistemului, ele pot crea sau anihila două impulsuri egale în modul și de sensuri opuse purtate de două părți componente ale sistemului (de exemplu în cazul exploziilor sau al ciocnirilor plastice). Cum ați putea explica înaintarea vapoarelor și a avioanelor cu elice?

R: impulsul navei este opus impulsului imprimat fluidului.

9. Caracatițele se pot deplasa cu o viteză pînă la 60 m/s, ejectînd periodic apa pe care o absorb. Pe ce principii se bazează deplasarea lor?

R: conservarea impulsului.

10. Dacă umflăm un balon de cauciuc cu aer și fără a-l lega la orificiu îi dăm drumul cu orificiul în jos, ce se va întîmpla?

R: se va ridica în sus.

11. Ce se întîmplă cu o barcă ușoară cînd ne deplasăm pe ea de la un capăt la celălalt?

R: se deplasează în sens invers.

12. Dacă pe un cărucior este suspendat un pendul și îi dăm drumul să oscileze, ce se va întîmpla cu căruciorul?

R: va oscila în sens invers.

13. *a)* De ce cînd atingem Pămîntul după o săritură trebuie să ne mai ghemuim (îndoind puțin picioarele)? Dar dacă am sta țeapăn?

b) De ce putem sări fără pericol de la etajul doi sau trei pe o plasă elastică întinsă deasupra solului?

c) Cînd un fotbalist prinde mingea, el relaxează puțin mușchii mîinilor și se retrage puțin înapoi împreună cu mingea. De ce? Dacă ar sta țeapăn și ar ține mîinile țeapăn, ce s-ar întîmpla?

R: forța medie de impact (ciocnire) este invers proporțională cu durata ciocnirii (v. relația 5.36).

14. Pe o masă de biliard stau două bile de diametre egale, dar probabil de mase diferite. Cum putem determina fără cîntar sau alte aparate, dacă bilele au mase egale sau care anume are masă mai mare?

R: prin ciocnire, (v. relația 5.30)

15. Impulsul unui corp este $p = 4,0$ N · s, iar energia cinetică $E_c = 8,0$ J. Să se afle masa și viteza corpului.

R: $m = \frac{p^2}{2E_c} = 1,0$ kg; $v = \frac{2E_c}{p} = 4,0$ m/s.

16. Ecuația de mișcare a unui punct material de masă $m = 0,20$ kg este $x = 2 - t + t^2$. Să se scrie expresia impulsului în funcție de timp.

R: $p = mv = -0,2 + 0,4\,t$.

17. Un punct material cu masa $m = 1,0$ kg se mișcă circular uniform cu viteza $v = 10$ m/s. Să se calculeze variația de impuls în timpul: *a)* unei perioade, *b)* unei jumătăți de perioadă, *c)* unui sfert de perioadă.

R: $|\Delta\vec{p}| = 0$; $2mv = 20$ N · s; $\sqrt{2} \cdot mv = 14,1$ N · s.

18. O bilă cu masa $m = 100$ g a căzut liber pe un plan orizontal avînd în momentul lovirii o viteză $v = 10$ m/s. Să se afle variația impulsului prin lovire, considerînd ciocnirea: *a)* perfect elastică, *b)* absolut inelastică (plastică). Dacă durata ciocnirii a fost $\Delta t = 20$ ms, care a fost forța medie de lovire?

$$\textbf{R:}\ a)\ \Delta p = 2mv = 2{,}0\ \text{N}\cdot\text{s};\ F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 100\ \text{N}.$$

$$b)\ \Delta p = mv = 1{,}0\ \text{N}\cdot\text{s};\ F_m = 50\ \text{N}.$$

19. Un corp lovește frontal un perete. În ce raport este forța medie de contact, în cazul ciocnirii elastice, față de forța din cazul ciocnirii plastice, dacă timpul de ciocnire este același?

R: 2.

20. Ce forță constantă de frînare trebuie aplicată unui tren de masă $m = 600$ t, care se mișcă cu viteza $v_0 = 72$ km/h, pentru a-l opri în $\Delta t = 10$ s?

R: $F = mv_0/\Delta t = 1{,}2$ MN.

21. Un corp cu masa $m_1 = 0{,}40$ kg și viteza $v_1 = 5{,}0$ m/s lovește un alt corp care se mișcă spre el pe aceeași direcție. După ciocnire corpurile se opresc. Care a fost impulsul celui de-al doilea corp?

R: $p_2 = -m_1v_1 = -2{,}0$ N · s.

22. Un vagonet de masă $M = 20$ kg se mișcă cu viteza $v = 3{,}0$ m/s. Ce viteză va căpăta vagonetul dacă în el cade vertical un sac cu masa $m = 10$ kg?

$$\textbf{R:}\ v' = v\frac{M}{M + m} = 2{,}0\ \text{m/s}.$$

23. Două bile de mase $m_1 = 1{,}0$ kg și $m_2 = 2{,}0$ kg se mișcă una spre cealaltă cu vitezele $v_1 = 1{,}0$ m/s și $v_2 = -2{,}0$ m/s. Să se afle pierderea de energie cinetică (căldura) prin ciocnirea lor plastică.

$$\textbf{R:}\ Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 = 3{,}0\ \text{J}.$$

24. O bilă de lemn cu masa $M = 1{,}00$ kg stă pe un suport inelar. Un glonț de masă $m = 10{,}0$ g vine de jos în sus, lovește cu viteza $v_0 = 300$ m/s bila și rămîne înfipt în ea. Care va fi timpul de urcare al bilei pînă la înălțimea maximă? Cîtă căldură se degajă?

$$\textbf{R:}\ t_u = \frac{m}{m + M}\frac{v_0}{g} = 0{,}30\ \text{s};\ Q = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}v_0^2 = 446\ \text{J}.$$

25. Un om aflat într-o barcă trage cu ajutorul unei sfori o a doua barcă cu o forță constantă $F = 100$ N. Masa primei bărci împreună cu omul este $m_1 = 100$ kg masa celei de-a doua bărci este $m_2 = 50$ kg. Neglijînd rezistența apei, să se afle vitezele bărcilor după $\Delta t = 2{,}0$ s.

R: $v = F\,\Delta t/m_1 = 2{,}0$ m/s; $v_2 = F\,\Delta t/m_2 = 4{,}0$ m/s.

26. Un om de masă $m = 70$ kg parcurge lungimea unei bărci (de la proră la pupă) $l = 4{,}0$ m. Cu cît se deplasează barca față de apă în acest timp, dacă masa ei este $M = 30{,}0$ kg?

$$\textbf{R:}\ s = \frac{m}{m + M}l = 2{,}8\ \text{m}.$$

27. Un vagon cu masa $m_1 = 10{,}0$ t se deplasează pe o cale ferată orizontală cu viteza inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s. După un timp $\Delta t = 10{,}0$ s el se ciocnește și se cuplează cu un al doilea vagon de masă $m_2 = 20{,}0$ t aflat în repaus. În timpul mișcării, atît înainte cît și după ciocnire, asupra fiecărui vagon acționează o forță de frecare egală cu $n = 98$-a parte din greutatea respectivului vagon. Să se afle viteza primului vagon înainte de ciocnire, viteza vagoanelor cuplate imediat după ciocnire, căldura degajată prin ciocnire, timpul și distanța pînă la oprirea vagoanelor cuplate.

$$\textbf{R:}\ v = v_0 - \frac{g}{n}\Delta t = 9{,}0\ \text{m/s};\ v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v = 3{,}0\ \text{m/s};$$

$$Q = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2v^2}{m_1 + m_2} = 270\ \text{kJ};\ \Delta t' = \frac{v'}{g/n} = 30\ \text{s};\ \Delta x' = \frac{v'^2}{2g/n} = 45\ \text{m}.$$

28. Un obuz de masă $M = 70$ kg zboară cu viteza $v = 300$ m/s. La un moment dat el explodează în două fragmente. Unul dintre ele de masă $m_1 = 30$ kg continuă să se miște înainte cu viteza $v_1 = 500$ m/s. Care este viteza celui de-al doilea fragment? Cîtă energie cinetică se creează?

$$\textbf{R:}\ v_2 = \frac{Mv - m_1v_1}{M - m_1} = 150\ \text{m/s};\ E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1M}{M - m_1}(v - v_1)^2 = 1{,}05\ \text{MJ}.$$

29. O moleculă de masă $m = 5{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, aflată într-un cilindru cu piston, se mișcă cu viteza $v_1 = 500$ m/s și ajunge din urmă pistonul care se mișcă cu viteza $v_2 = 1{,}0$ m/s și de care se ciocnește frontal perfect elastic. Să se afle variația energiei cinetice și a impulsului moleculei în urma ciocnirii.

$$\textbf{R:}\ \Delta E_c = -2mv_2(v_1 - v_2) = -5{,}0 \cdot 10^{-23}\ \text{J};\ \Delta p = -2m(v_1 - v_2) = -5{,}0 \cdot 10^{-23}\ \text{N}\cdot\text{s}.$$

30. Două bile de mase m_1 m_2 sînt suspendate pe fire paralele, astfel încît bilele se ating. Prima bilă este deviată pînă la o înălțime h_1 și lăsată liber. La ce înălțime se ridică bilele dacă ciocnirea este: *a)* elastică; *b)* plastică. *c)* Cîtă căldură se degajă în ultimul caz?

$$\textbf{R:}\ a)\ h_1' = h_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2;\ h_2' = h_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2;$$

$$b)\ h' = h_1\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2;\ c)\ Q = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}gh_1.$$

31. O particulă de masă m_1 lovește o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. Să se afle ce fracțiune din energia cinetică inițială a particulei *1* este transferată particulei *2*, dacă ciocnirea este unidimensională: *a)* perfect elastică; *b)* plastică. *c)* Ce fracțiune se transformă în căldură în ultimul caz?

$$\textbf{R:}\ a)\ \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2};\ b)\ \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2};\ c)\ \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

6

MOMENTUL CINETIC

Alături de mărimile fizice impuls şi energie cinetică, momentul cinetic joacă un rol important în fizică, în special în caracterizarea mişcării de *rotaţie.*

6.1. MOMENTUL FORŢEI. MOMENTUL CINETIC AL PUNCTULUI MATERIAL

6.1.1. **Momentul forţei în raport cu un punct.** Dacă un corp are o articulaţie fixă în jurul căreia se poate roti liber, atunci aplicînd o forţă corpului, el se va roti în jurul unei axe trecînd prin articulaţie. Axa de rotaţie va fi perpendiculară pe planul definit de articulaţie şi forţă (fig. 6.1).

Efectul de rotaţie este acelaşi, oriunde am aplica forţa pe dreapta sa suport, de exemplu prin intermediul unui fir mai lung sau mai scurt. Dacă suportul forţei trece prin articulaţie, forţa nu poate produce rotaţie, ci doar trage de articulaţie.

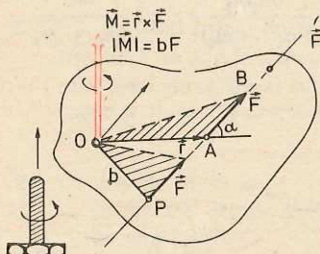


Fig. 6.1. O forţă aplicată unui corp, avînd o articulaţie, îl roteşte în jurul unei axe trecînd prin articulaţie, perpendiculară pe planul definit de forţă şi articulaţie. Efectul de rotaţie este dat de momentul forţei în raport cu articulaţia.

Efectul de rotaţie este determinat atît de mărimea forţei, cît şi de distanţa dreptei-suport a forţei pînă la articulaţie.

Se numeşte braţul forţei faţă de un punct distanţa de la acel punct pînă la dreapta suport a forţei, adică lungimea perpendicularei coborîte din acel punct pe dreapta suport a forţei.

De exemplu, dacă înşurubăm o piuliţă cu o cheie, efectul depinde atît de mărimea forţei aplicate, cît şi de braţul forţei, adică de lungimea cheii, dacă aplicăm forţa la capătul cheii, perpendicular pe cheie.

Prin urmare, efectul de rotaţie se poate măsura prin produsul dintre forţă şi braţul ei: $F \cdot b$. Mai mult, ţinînd seama de direcţia axei de rotaţie şi de sensul rotaţiei produse, putem introduce un *vector* avînd modulul Fb, direcţia dată de axa de rotaţie şi sensul pe această axă dat de sensul de înaintare al unui şurub (drept) rotit de forţa aplicată (ca şi cum corpul ar fi un şurub rotit cu forţa $\vec{F}$). Acesta este *vectorul moment al forţei* în raport cu articulaţia.

Poziţia forţei pe dreapta suport este dată de vectorul de poziţie $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, care formează unghiul α cu vectorul forţă $\vec{F}$, atunci braţul forţei va fi $b = r \sin \alpha$ şi modulul momentului:

$$M = bF = rF \sin (\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha. \qquad (6.1)$$

Prin urmare, din doi vectori $\vec{r}$ şi $\vec{F}$ se obţine un al treilea vector $\vec{M}$ cu modulul $|\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin (\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha$, cu direcţia perpendiculară pe cei doi vectori deci pe planul lor $[\vec{r}, \vec{F}]$ şi cu sensul pe această direcţie dat de sensul de înaintare al unui şurub sau burghiu aşezat pe această direcţie şi rotit de la $\vec{r}$ la $\vec{F}$. Se introduce astfel o nouă operaţie între vectori (fig. 6.2).

Se numeşte produs vectorial a doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, notat $\vec{a} \times \vec{b}$, un al treilea vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, avînd modulul $|\vec{c}| = c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin (\vec{a}, \vec{b}) = ab \sin \alpha$, direcţia perpendiculară pe planul vectorilor $(\vec{a}, \vec{b})$ deci pe fiecare din ei, iar sensul dat de regula burghiului.

Regula burghiului: se aşază burghiul pe direcţia respectivă şi se roteşte astfel încît primul vector $\vec{a}$ să se suprapună peste cel de-al doilea $\vec{b}$, atunci sensul de înaintare al burghiului va fi sensul produsului vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

Din figura 6.2 se vede că *modulul* produsului vectorial, adică $ab \sin \alpha$, este egal cu *aria paralelogramului* construit cu cei doi vectori (de exemplu baza b înmulţită cu înălţimea $a \sin \alpha$).

Produsul vectorial a doi vectori *coliniari* sau *paraleli* este *nul* ($\sin 0° = 0$, $\sin 180° = 0$) (de exemplu dacă $\vec{r}$ şi $\vec{F}$ sînt paraleli sau coliniari: forţa trece prin articulaţie).

Dacă schimbăm ordinea factorilor, atunci trebuie să rotim pe $\vec{b}$ către $\vec{a}$, deci se schimbă sensul produsului vectorial. Prin urmare, produsul vectorial este *necomutativ*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}, \qquad (6.2)$$

(se spune în acest caz că produsul este anticomutativ).

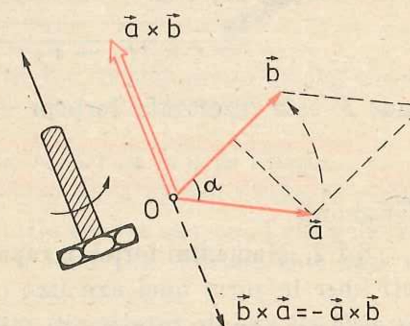


Fig. 6.2. Produsul vectorial a doi vectori $\vec{a} \times \vec{b}$ este un vector cu modulul $ab \sin \alpha$, cu direcţie perpendiculară pe $(\vec{a}, \vec{b})$ şi cu sensul dat de regula burghiului.

Dacă schimbăm sensul unuia dintre vectori, se schimbă şi sensul vectorului produs.

Se poate verifica faptul că produsul vectorial este *distributiv:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \text{ şi } (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \quad (6.3)$$

unde, bineînţeles, nu trebuie schimbată *ordinea* factorilor!

Momentul unei forţe în raport cu un punct, numit pol, este definit prin produsul vectorial dintre vectorul de poziţie al originii forţei faţă de pol şi vectorul forţă:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \ |\vec{M}| = M = rF \sin \alpha = bF. \quad (6.4)$$

Trebuie reţinută *ordinea* factorilor: $\vec{r} \times \vec{F}$ şi *nu* $\vec{F} \times \vec{r}$. Dacă schimbăm sensul forţei, se schimbă şi sensul vectorului moment.

Momentul forţei se măsoară în N · m.

(Atenţie, produsul N · m nu trebuie înlocuit cu joule, fiindcă nu reprezintă lucrul mecanic.)

Din figura 6.1 se vede că momentul forţei nu depinde de poziţia forţei pe dreapta suport: nu se schimbă nici modulul $rF \sin \alpha = bF$ (dublul ariei triunghiului OAB), nici direcţia sau sensul. Momentul forţei este zero dacă polul se află pe suportul forţei deoarece atunci braţul forţei este zero ($\vec{r}$ şi $\vec{F}$ sînt paraleli).

Dacă asupra unui punct material P acţionează mai multe forţe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, atunci fiecare forţă dă un moment în raport cu un pol O:

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1, \ \vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2, ..., \vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_n, \ (\vec{r} = \overrightarrow{OP}).$$

Adunînd aceste egalităţi membru cu membru, avem:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + ... + \vec{r} \times \vec{F}_n =$$

$$= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \quad (6.5)$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forţelor concurente şi $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ — momentul ei.

Suma vectorială a momentelor forţelor concurente în raport cu un pol este egală cu momentul rezultantei acestor forţe în raport cu acelaşi pol (teorema lui Varignon).

6.1.2. **Momentul forţei în raport cu o axă.** Fie acum un corp care se poate roti liber în jurul unei axe fixe (fig. 6.3). Dacă forţa aplicată corpului este *paralelă* cu axa de rotaţie sau intersectează axa de rotaţie, ea nu poate roti corpul, ci doar îndoaie axa sau trage de axă. De aceea descompunem forţa $\vec{F}$ în două forţe componente: $\vec{F}_{\parallel}$ *paralelă* cu axa de rotaţie şi $\vec{F}_{\perp}$ *perpendiculară* pe axă. Forţa componentă $\vec{F}_{\parallel}$ nu poate roti corpul, ci doar îndoaie axa (trage corpul paralel cu axa); momentul ei în raport cu un punct de pe axă ($M_{\perp}$) este perpendicular pe axa de rotaţie şi tinde să îndoaie axa. Numai forţa componentă transversală $\vec{F}_{\perp}$ (perpendiculară pe axa de rotaţie) poate roti corpul în jurul axei în planul (π) perpendicular pe axă; momentul ei $M_{\parallel} = F_{\perp} \cdot b$ în raport cu punctul C — piciorul perpendicularei din P pe axă, este paralel cu axa şi el este acela care roteşte corpul în jurul axei.

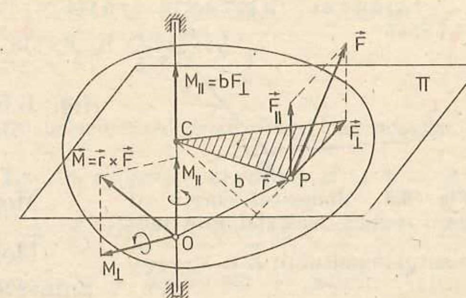


Fig. 6.3. Componenta $F_{\parallel}$ paralelă cu axa de rotaţie nu produce rotaţie, momentul ei $M_{\perp}$ este perpendicular pe axă (tinde doar să îndoaie axa). Componenta $F_{\perp}$ perpendiculară pe axă roteşte corpul în jurul axei şi dă moment în raport cu axa $M_{\parallel} = bF$.

Momentul unei forţe $\vec{F}$ *în raport cu o axă este egal cu produsul dintre componenta transversală a forţei* $F_{\perp}$ *şi braţul său* b *pînă la axă, în planul perpendicular pe axă* (π), *prevăzut cu semnul plus sau minus, după cum rotaţia produsă corespunde sau nu* (după regula burghiului) *sensului pozitiv al axei*: $M_{\parallel} = \pm b \cdot F_{\perp}$.

Dacă luăm momentul forţei $\vec{F}$ faţă de un pol O de pe axă, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, atunci componenta vectorului $\vec{M}$ pe axă va fi tocmai $M_{\parallel} = \pm bF_{\perp}$.

Dacă asupra unui corp acţionează mai multe forţe, atunci momentele lor faţă de acelaşi pol se compun după regula paralelogramului, ca orice vectori. Momentele lor în raport cu o axă se adună algebric (ţinînd seama de semnul lor). Dacă momentul rezultant în raport cu o axă este nul, corpul va fi în echilibru de rotaţie faţă de acea axă.

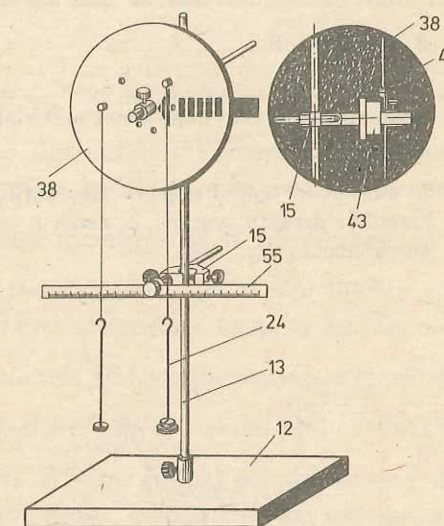


Fig. 6.4. Montaj pentru studiul compunerii momentelor.

Experiment. Compunerea momentelor în raport cu axa de rotaţie.

Montajul este arătat în figura 6.4. Se aleg două orificii în discul gradat (*38*) în care se introduc cepii de plastic (*47*). De cepi se suspendă cîrligele (*24*) pentru greutăţi crestate prin intermediul a două fire. Forţele sînt date de greutăţile crestate împreună cu cîrligele şi cepii (5 g).

Se calculează momentele celor două forţe în raport cu axul discului; ele sînt de semne opuse şi trebuie să fie egale în modul — discul fiind în repaus.

Se schimbă greutăţile şi orificiile şi se repetă experienţa.

6.1.3. **Momentul cinetic al punctului material.** Analog momentului unei forţe în raport cu un pol sau o axă, se poate defini momentul oricărui *vector*.

Interes fizic deosebit prezintă momentul *impulsului*.

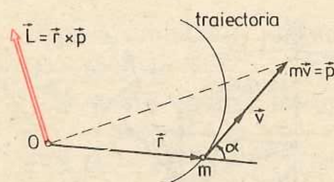


Fig. 6.5. Momentul cinetic al unui punct material este momentul impulsului: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$.

Momentul cinetic al unui punct material în raport cu un pol este momentul impulsului (fig. 6.5):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \qquad (6.6)$$

Momentul cinetic se măsoară în J.s.

Momentul cinetic $\vec{L}$ definit mai sus se mai numește moment cinetic *orbital*, deoarece este legat de mișcarea particulei pe *orbita sa*. (Particulele atomice pot avea și un moment cinetic *propriu* $\vec{S}$ numit spin, atunci momentul cinetic total al particulei va fi $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.)

EXEMPLE

1. Momentul cinetic al unui punct material *izolat*, în raport cu orice pol, *se conservă* (este constant).

În adevăr, în timpul mișcării sale rectilinii uniforme impulsul $m\vec{v}$ este constant, doar lunecă pe dreapta mișcării, de aceea $L = mv \cdot b =$ const., la fel, direcția și sensul rămîn neschimbate (fig. 6.6).

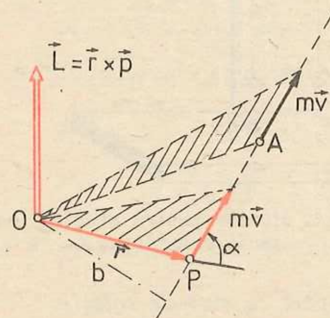


Fig. 6.6. Momentul cinetic al unui punct material izolat, deci în mișcare rectilinie uniformă, în raport cu orice pol, se conservă.

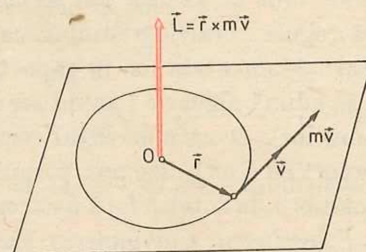


Fig. 6.7. La mișcarea circulară uniformă, momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului se conservă (fiindcă momentul forței este zero față de acest pol).

2. În mișcarea circulară *uniformă*, momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului *se conservă* (fig. 6.7).

În adevăr, modulul momentului este constant: $L = mvr = mr^2\omega$, iar direcția și sensul nu se schimbă.

6.2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC PENTRU PUNCTUL MATERIAL. CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC

Să calculăm variația momentului cinetic pe unitatea de timp. La momentul t, momentul cinetic este $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. La un moment apropiat $t' = t + \Delta t$, vectorul de poziție $\vec{r}$ devine $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ și viteza $\vec{v}$ devine $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$, iar impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$ devine $\vec{p}' = m\vec{v}' = \vec{p} + \Delta\vec{p} = m\vec{v} + m\Delta\vec{v}$. Atunci momentul cinetic $\vec{L}$ devine:

$$\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = (\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \Delta\vec{p} + \Delta\vec{r} \times \vec{p} + \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{p},$$

de unde variația momentului cinetic raportată la intervalul de timp respectiv Δt:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{\vec{L}' - \vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times m\vec{v} + \Delta\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

Pentru a găsi variația „momentană" (sau „instantanee") a momentului cinetic pe unitatea de timp, facem, după cum știm, pe Δt să descrească către zero (să tindă către zero: $\Delta t \to 0$), atunci, bineînțeles, și $\Delta\vec{r}$ și $\Delta\vec{p}$ descresc către zero, dar raportul $\Delta\vec{r}/\Delta t$ devine viteza momentană $\vec{v}$, iar $\Delta\vec{p}/\Delta t$ devine egal cu forța $\vec{F}$ (conform principiului II). Atunci ultimii doi termeni din expresia de mai sus se anulează: $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ deoarece sînt vectori coliniari (paraleli), iar ultimul termen se anulează fiindcă factorul $\Delta\vec{p}/\Delta t$ devine egal cu forța $\vec{F}$, iar factorul $\Delta\vec{r}$ se anulează cînd $\Delta t \to 0$. Rămîne numai primul termen din membrul drept care reprezintă momentul forței. Obținem astfel *teorema momentului cinetic* pentru punctul material.

Momentul forței în raport cu un pol este egal cu variația momentului cinetic pe unitatea de timp, în raport cu același pol.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0, \ \left(\text{adică } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}\right). \qquad (6.7)$$

Dacă momentul forței rezultante în raport cu un pol este permanent nul, variația momentului cinetic al punctului material va fi zero, adică momentul cinetic în raport cu acel pol *se conservă*. Un punct material nu-și poate schimba momentul său cinetic decît sub acțiunea unui moment al forței.

De exemplu în cazul unui punct material *izolat*, $\vec{F} \equiv 0$, deci $\vec{M} \equiv 0$ față de orice pol, de aceea momentul cinetic $\vec{L}$ în raport cu orice pol *se conservă*.

În mişcarea circulară *uniformă* forţa este *centripetă*, deci momentul ei îi raport cu *centrul* cercului este permanent zero, de aceea momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului *se conservă.*

În mişcarea planetelor în jurul Soarelui forţa de atracţie gravitaţională exercitată de Soare asupra planetei trece permanent prin centrul Soarelui, de aceea momentul forţei în raport cu Soarele este nul, deci momentul cinetic al planetei în raport cu Soarele se conservă. Analog se întîmplă în mişcarea electronilor în jurul nucleului într-un atom.

Dacă momentul rezultant al unei forţe în raport cu o *axă* este zero, atunci momentul cinetic în raport cu *acea axă se conservă* (este constant).

Analog impulsului, momentul cinetic este şi el o măsură a mişcării din punctul de vedere al rotaţiei: teorema momentului cinetic exprimă o lege de conservare a mişcării mecanice, transmise de la un corp la altul prin intermediul momentului forţei în procesul interacţiunii. Ecuaţia (6.7) este analoagă cu ecuaţia fundamentală a dinamicii: forţei îi corespunde momentul forţei, iar impulsului îi corespunde momentul impulsului, adică momentul cinetic.

Ecuaţia (6.7) exprimă legea fundamentală a dinamicii pentru mişcarea de rotaţie.

6.3. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC TOTAL AL UNUI SISTEM MECANIC. CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC TOTAL

Fie un sistem de două particule (fig. 6.8). Momentele celor două forţe interne $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ şi $\vec{\mathcal{F}}_{21} = -\vec{\mathcal{F}}_{12}$ în raport cu un pol O sînt egale în modul şi de sensuri opuse $\vec{\mathfrak{M}}_{12} = -\vec{\mathfrak{M}}_{21}$ sau $\vec{\mathfrak{M}}_{12} + \vec{\mathfrak{M}}_{21} = 0$. În adevăr, modulele momentelor sînt egale: $|\vec{\mathcal{F}}_{12}| \cdot b = |\vec{\mathcal{F}}_{21}| \cdot b$ (avînd acelaşi braţ, b); direcţia este aceeaşi — perpendiculară pe planul $(O, \vec{\mathcal{F}}_{12}, \vec{\mathcal{F}}_{21})$, iar sensurile sînt opuse deoarece forţele $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ şi $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ sînt de sensuri opuse.

Momentul rezultant al forţelor interne ale unui sistem de particule, în raport cu orice pol, este nul.

Rezultatul este valabil pentru un sistem format dintr-un număr *oarecare* de particule. În adevăr, forţele interne de interacţiune dintre particulele sistemului sînt totdeauna *perechi*, acţiunea şi reacţiunea, egale în modul şi de sensuri opuse şi acţionează pe aceeaşi dreaptă care uneşte cele două particule (principiul III). Deci momentele lor, faţă de orice pol, vor fi egale în modul şi de sensuri opuse. De aceea dacă însumăm momentele pentru întregul sistem ele se anulează două cîte două şi momentul rezultant va fi nul.

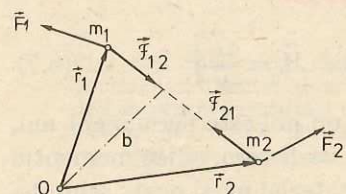


Fig. 6.8. Momentul rezultant al forţelor interne ale unui sistem de particule, în raport cu orice pol, este zero.

Să scriem teorema momentului cinetic pentru fiecare particulă (se consideră mai jos momentele medii pe intervalul de timp Δt):

$$\vec{M}_1 + \vec{\mathfrak{M}}_1 = \frac{\Delta \vec{L}_1}{\Delta t}, \quad \vec{M}_2 + \vec{\mathfrak{M}}_2 = \frac{\Delta \vec{L}_2}{\Delta t},$$

unde $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ sînt momentele forţelor *externe* care acţionează asupra particulei *1*, respectiv *2*, iar $\vec{\mathfrak{M}}_1$, $\vec{\mathfrak{M}}_2$ sînt momentele forţelor *interne* care acţionează asupra acestor

particule (fig. 6.8). Adunînd membru cu membru cele două ecuaţii şi ţinînd seama că momentul rezultant al forţelor interne este nul, obţinem:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{\Delta \vec{L}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{L}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)}{\Delta t}.$$

Rezultatul este valabil şi pentru un sistem format dintr-un număr *oarecare* de puncte materiale:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \frac{\Delta(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t}, \tag{6.8}$$

unde $\vec{M}$ este momentul rezultant al forţelor *externe*, iar $\vec{J}$ momentul cinetic total al sistemului.

Proiectînd ecuaţia (6.8) pe o axă, obţinem

$$M_{\parallel} = \frac{\Delta J_{\parallel}}{\Delta t}, \tag{6.9}$$

unde $M_{\parallel}$ este momentul rezultant în raport cu axa, iar $J_{\parallel}$ este momentul cinetic total în raport cu axa.

Dacă sistemul este *izolat* ($\vec{M} \equiv 0$), momentul cinetic total al sistemului, faţă de orice pol sau axă, *se conservă*.

Dacă momentul rezultant al forţelor externe în raport cu un pol sau în raport cu o axă este permanent nul, *momentul cinetic total al sistemului în raport cu acel pol sau acea axă se conservă.*

Prin urmare *forţele interne nu pot modifica momentul cinetic total al sistemului* (îl pot doar redistribui între părţile sistemului). Numai prin interacţiune cu mediul exterior se transmite mişcarea şi se schimbă momentul cinetic total al sistemului.

Dacă momentul rezultant al forţelor externe aplicate unui corp, în raport cu un punct, este nul, corpul nu se va roti în jurul nici unei axe trecînd prin acel punct. La fel, dacă momentul rezultant al forţelor externe aplicate corpului în raport cu o axă, este nul, corpul nu se va roti în jurul acelei axe (se presupune că iniţial corpul nu se rotea în jurul acelei axe).

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. O particulă în mişcare este supusă la o forţă a cărei dreaptă suport trece printr-un punct fix. Ce se poate spune despre momentul cinetic al particulei?

R: se conservă faţă de punctul fix.

2. Se conservă momentul cinetic în raport cu Soarele al unei comete care ocoleşte Soarele pe o traiectorie parabolică? Dar în cazul planetelor care nu se mişcă pe traiectorii circulare?

R: se conservă.

3. Dacă vectorul moment cinetic al unei particule este constant (se conservă), traiectoria sa este plană. De ce? Dar dacă numai direcţia vectorului moment este constantă, cum este traiectoria?

R: $\vec{L}$ are direcţie fixă; plană.

4. Asupra unui satelit artificial al Pămîntului acționează o forță de frecare cu aerul $\vec{F}_f = -k\vec{v}$. Se conservă momentul său cinetic în raport cu centrul Pămîntului? Rămîne traiectoria sa plană?

R: nu; da.

5*. Se conservă momentul cinetic total al particulelor rezultate în urma exploziei unui corp izolat?

R: da.

6. O particulă se mişcă în vid sub acțiunea forței de greutate. Momentul cinetic în raport cu orice axă din planul mişcării se conservă. De ce? Ce valoare are?

R: $\vec{G}$ şi $\vec{p}$ sînt incidente cu axa: $M_{\parallel} = L_{\parallel} \equiv 0$.

7*. O particulă suspendată printr-un fir oscilează într-un plan vertical (pendul simplu). Care este momentul cinetic față de verticala prin punctul de suspensie? Care este variația pe unitatea de timp a momentului cinetic în raport cu punctul de suspensie?

R: zero; $|\Delta\vec{L}/\Delta t| = mgl\sin\theta$.

7

CINEMATICA ŞI DINAMICA RIGIDULUI

7.1. NOŢIUNEA DE RIGID

Pe un plan înclinat se lasă să se rostogolească un cilindru gol şi unul plin, cei doi cilindri avînd acelaşi diametru şi aceeaşi masă. Se constată că cilindrul plin ajunge jos într-un timp mai scurt decît cilindrul gol.

Experiența arată că în acest caz nu mai putem considera corpurile ca puncte materiale; modelul de punct material folosit pînă acum în mecanică nu mai poate explica rezultatul acestei experiențe. Trebuie să luăm în considerație forma, dimensiunile şi felul în care este distribuită masa corpurilor.

Un corp cu anumite dimensiuni poate avea în urma acțiunii unei forțe în afara mişcării centrului de masă şi mişcări suplimentare. Aceste mişcări pot fi efectuate de întregul corp sau numai de anumite părți ale lui şi se suprapun peste mişcarea de translație.

Să considerăm un caz simplu, acela în care corpul nu are părți mobile independente. Punctele materiale din care se consideră alcătuit corpul nu efectuează decît mişcări de ansamblu. Acest corp se numeşte rigid.

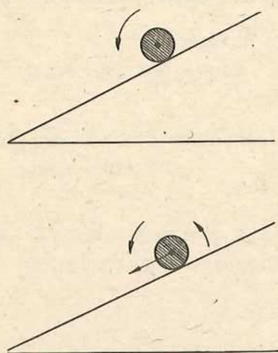
Un corp rigid este un sistem de puncte materiale ale căror distanțe reciproce rămîn neschimbate.

Ca şi punctul material, corpul rigid este un model. Acest model poate fi realizat cu bună aproximație de o bilă de oțel, de o roată, un cilindru, o bară, un cărucior etc.

7.2. VITEZA ŞI ACCELERAŢIA UNGHIULARĂ

EXPERIMENT

Pe un plan înclinat sau un jgheab, se lasă să se mişte liber o bilă. Bila efectuează o mişcare de translație accelerată şi în acelaşi timp efectuează şi o mişcare de rotație (fig. 7.1).



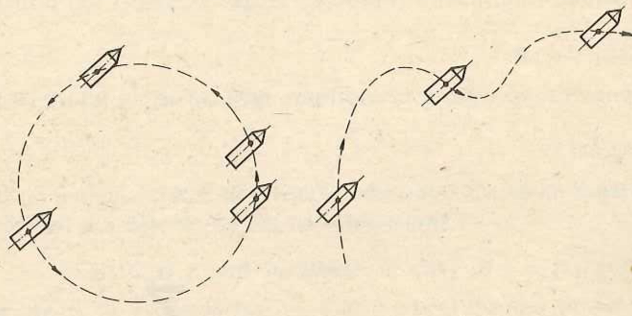


Fig. 7.1. O bilă în mişcare pe un plan înclinat.

Fig. 7.2. În mişcarea de translaţie traiectoriile, vitezele şi acceleraţiile tuturor punctelor corpului sînt identice.

Atît această experienţă cît şi altele asemănătoare ne arată că un corp rigid se poate afla în mişcare de translaţie, în mişcare de rotaţie în jurul unei axe sau într-o mişcare elicoidală, rotaţie şi translaţie simultan.

Mişcarea de translaţie a unui corp rigid este mişcarea în care orice dreaptă legată de corp îşi păstrează orientarea, adică se mişcă paralel cu ea însăşi.

În această mişcare toate punctele corpului rigid au traiectorii, viteze şi acceleraţii identice şi de aceea această mişcare este determinată prin mişcarea unui singur punct material ce aparţine corpului (fig. 7.2).

Mişcarea de rotaţie a unui rigid este mişcarea în care toate punctele sale descriu cercuri ale căror centre sînt situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul cercurilor descrise, dreaptă numită axă de rotaţie (fig. 7.3).

Razele vectoare ale punctelor diferite din corpul rigid vor descrie acelaşi unghi $\Delta\alpha$ în intervalul de timp Δt. Deci viteza unghiulară ω va fi aceeaşi pentru toate punctele corpului rigid în rotaţie:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \quad (7.1)$$

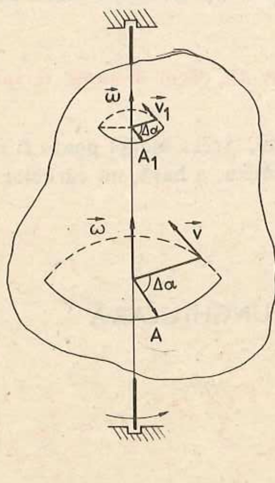


Fig. 7.3. Punctele unui solid rigid aflat în mişcare de rotaţie descriu cercuri cu centrul pe axa de rotaţie.

Vitezele liniare ale diferitelor puncte ale rigidului sînt diferite deoarece şi razele cercurilor descrise sînt diferite:

$$v_i = \omega r_i. \quad (7.2)$$

Viteza unghiulară ω este considerată o mărime vectorială, deci poate fi reprezentată printr-un vector. Vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ are direcţia axei de rotaţie, este deci perpendicular pe planul traiectoriei. Sensul acestui vector este determinat prin regula şurubului drept (fig. 7.3).

Datorită relaţiei $v = \omega r$, a felului în care s-a ales direcţia şi sensul vectorului $\vec{\omega}$, se poate reprezenta viteza liniară $\vec{v}$ a mişcării unuia din punctele ce alcătuiesc rigidul, ca produs vectorial al vectorilor $\vec{\omega}$ şi $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (7.3)$$

Vectorul produs vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ este perpendicular pe planul format de cei doi vectori, avînd sensul înaintării unui şurub drept (fig. 7.4). Mărimea acestui vector este $v = \omega r \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = \omega r$ deoarece unghiul $(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = 90°$.

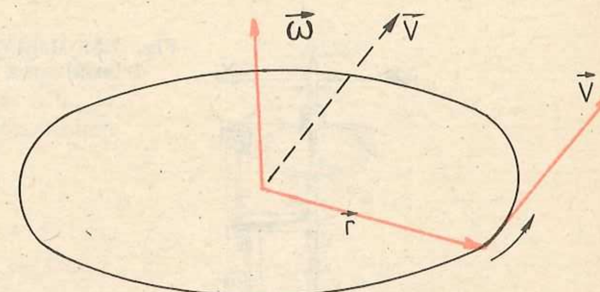


Fig. 7.4. Viteza unghiulară $\vec{\omega}$ este o mărime vectorială.

Dacă vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ este constant în timp, mişcarea de rotaţie este uniformă.

În cazul în care rigidul se roteşte în aşa fel încît viteza unghiulară ω creşte sau scade în timp, mişcarea de rotaţie este neuniformă, atunci relaţia:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (7.4)$$

defineşte mărimea numită *acceleraţie unghiulară*. Ca şi viteza unghiulară $\vec{\omega}$, acceleraţia unghiulară $\vec{\varepsilon}$ se reprezintă printr-un vector şi în cazul unei axe de rotaţie fixe direcţia acestui vector este aceeaşi cu direcţia vectorului $\vec{\omega}$. În SI mărimile ω şi ε se măsoară în

$$[\omega]_{SI} = \text{rad/s} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ respectiv } [\varepsilon]_{SI} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

EXPERIMENTE

a) Determinarea vitezei unghiulare ω. Se realizează un montaj experimental aşa cum arată figura 7.5. Măsurarea timpului în care este descris un unghi oarecare α se realizează cu dispozitivul electrochimic ataşat trusei de mecanică sau cu ajutorul unui ceas cu secundar. Montajul electric este cel indicat în figura 7.6. Pe discul gradat din montaj, se fixează două întrerupătoare în sensul rotirii tamburului pentru un anumit unghi α. Acţionarea întrerupătoarelor o face un indicator care se roteşte cu întregul sistem. De firul trecut peste scripete, se suspendă cîrligul pentru discurile crestate. La un mic impuls, tija cu cele două discuri la capete începe să se rotească aproape uniform. Măsurînd timpul t în care este descris unghiul α se determină viteza unghiulară $\omega = \alpha/t$. Repetînd experienţa pentru alte unghiuri, rezultatele obţinute pot fi comparate şi înscrise într-un tabel de forma:

t(s)	$t_1, t_2 \ldots t$
α (rad)	$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha$
ω (rad/s)	

b) Determinarea acceleraţiei unghiulare ε. La montajul anterior se face o modificare, introducînd peste tamburul cu raza de 20 mm un alt tambur cu raza de 40 mm. Dispozitivul de măsurare a timpului nu mai este folosit acum. Se suspendă cîrligul pentru discurile crestate de firul trecut peste scripete. Pe cîrlig este introdus un disc cu masa de 10 g.

Fig. 7.5. Montaj experimental pentru determinarea vitezei unghiulare.

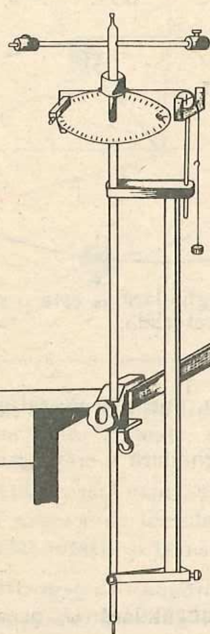
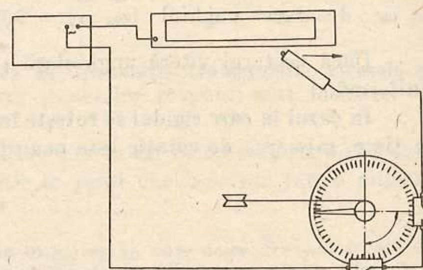


Fig. 7.6. Montajul electric pentru experimentul din figura 7.5.



Pe bara divizată a montajului, se aleg două repere, unul superior şi altul inferior care delimitează o distanţă h.

Se roteşte bara (tija) pînă cînd cîrligul cu discurile crestate ajunge în dreptul reperului superior. Din acest moment sistemul este lăsat liber şi se măsoară timpul t în care este parcurs spaţiul h. Timpul se măsoară cu ajutorul unui ceas cu secundar sau cu un cronometru. Din ecuaţiile mişcării uniform accelerate $\omega = \varepsilon t$ şi $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} t^2$, unde $\alpha = h/r$ r fiind raza tamburului, rezultă pentru acceleraţia unghiulară ε expresia:

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}.$$

7.3. ENERGIA CINETICĂ DE ROTAŢIE. MOMENTUL DE INERŢIE AL UNUI RIGID

EXPERIMENT

Se realizează montajul pentru determinarea vitezei unghiulare (fig. 7.5). Pe cîrlig se aşază discuri crestate cu mase de 50 g. Se înfăşoară firul pe tambur pînă cînd cîrligul este adus la partea superioară a barei divizate. Se lasă sistemul liber. Acesta va efectua o mişcare de rotaţie uniform accelerată. După desfăşurarea completă a firului, mişcarea de rotaţie continuă, firul cu discurile crestate urcă, sistemul efectuează un lucru mecanic pentru ridicarea discurilor. Rezultă de aici că în timpul mişcării de rotaţie la coborîre, variaţia energiei potenţiale a greutăţii a produs variaţia energiei cinetice (creşterea acestei energii) a sistemului care a realizat un lucru mecanic, adică ridicarea discurilor.

De cine depinde energia cinetică de rotaţie?

Să considerăm un rigid care se roteşte cu viteza unghiulară, constantă, în jurul unei axe fixe (fig. 7.7). Un punct material de masă m aflat la distanţa r de axa de rotaţie are viteza liniară $v = \omega r$ şi energia cinetică:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2.$$

Expresia mr^2 se numeşte moment de inerţie al unui punct material faţă de o axă.

Dacă însumăm energiile cinetice ale tuturor punctelor rigidului, obţinem energia cinetică totală a solidului aflat în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară constantă ω:

$$E_{c,\,rot} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^{k=n} m_k r_k^2. \qquad (7.5)$$

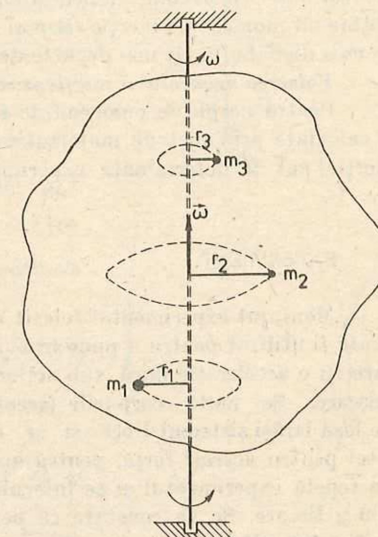


Fig. 7.7. Momentul de inerţie al unui rigid este egal cu suma momentelor de inerţie ale particulelor componente.

Expresia:

$$I = \sum_{k=1}^{k=n} m_k r_k^2 \qquad (7.6)$$

se numeşte *moment de inerţie al rigidului* faţă de axa de rotaţie considerată.

Din definiţia momentului de inerţie (7.6) rezultă că unitatea de măsură în SI este

$$[I]_{SI} = [m][r^2] = \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Observaţi că momentul de inerţie al unui rigid este egal cu suma momentelor de inerţie ale particulelor componente ale rigidului. Din relaţia (7.5) şi ţinînd seama de relaţia (7.6) obţinem:

$$E_{c,\,rot} = \frac{1}{2} I\omega^2. \qquad (7.7)$$

Pentru un ω dat, energia cinetică de rotaţie este cu atît mai mare cu cît punctele materiale, care alcătuiesc rigidul, sînt distribuite la distanţe mai mari faţă de axa de rotaţie, deci cu cît momentul de inerţie este mai mare.

Energia cinetică a unui solid rigid aflat în mişcare de translaţie şi de rotaţie se poate calcula prin relaţia:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (7.8)$$

unde m_s reprezintă masa rigidului, v — viteza centrului de masă, I — momentul de inerţie faţă de axa de rotaţie ce trece prin centrul de masă.

Dacă se face comparaţie între energia cinetică de translaţie $E_{c,\,trans} = \frac{1}{2} m_s v^2$ şi energia cinetică de rotaţie, $E_{c,\,rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$ se observă că rolul masei m_s la mişcarea de translaţie, îl are, la mişcarea de rotaţie, momentul de inerţie I. Valoarea momentului de inerţie I depinde nu numai de valoarea maselor punctelor materiale care alcătuiesc rigidul considerat ci şi de distanţele (distribuţia) lor faţă de axa de rotaţie.

La o aceeaşi masă totală, solidul care are punctele materiale mai depărtate de axă va avea un moment de inerţie mai mare. De exemplu, momentul de inerţie al unui cilindru gol de grosime neglijabilă, este mai mare decît cel al unui cilindru plin, omogen, de

aceeaşi masă cu primul, ambele calculate față de axa lor de simetrie. Aşadar, pentru a obține un moment de inerție cît mai mare substanța din care este format rigidul respectiv trebuie distribuită cît mai departe de axa de rotație.

Valoarea momentului inerție se schimbă dacă se schimbă poziția axei de rotație.

Pentru corpurile omogene de formă geometrică regulată momentele de inerție pot fi calculate prin metode matematice. Pentru corpurile de formă oarecare momentele de inerție pot fi determinate experimental.

EXPERIMENT

Montajul experimental folosit pentru determinarea accelerației unghiulare (fig. 7.5) poate fi utilizat pentru a pune în evidență momentul de inerție. Se pune sistemul în mişcare cu o accelerație mică, sub acțiunea discurilor crestate. Se observă cu atenție această mişcare. Se mută corpurile (greutățile) cu şurub de la capetele tijei mai spre centru. Se lasă iarăşi sistemul liber şi se observă că mişcarea are o accelerație mai mare. Deci pentru aceeaşi forță, pentru aceeaşi masă dar altfel distribuită, efectele sînt diferite. Se repetă experimentul şi se înlocuiesc corpurile de pe tijă cu alte două mai mici, de 100 g fiecare. Se va constata că pentru aceleaşi poziții ale corpurilor, efectele aceleiaşi forțe sînt altele.

Rezultă că într-o mişcare de rotație, inerția sistemului depinde atît de masa lui cît şi de distribuția acestei mase în raport cu axa de rotație. În tabelul următor sînt date expresiile momentelor de inerție pentru cîteva corpuri rigide, omogene, de formă geometrică regulată față de axele de rotație indicate.

Tabelul 7.1.

Cilindru plin	Cilindru gol	Inel cilindric	Sferă plină	Bară subțire
$I=\frac{1}{2}mR^2$	$I=mR^2$	$I=\frac{1}{2}m(R^2+r^2)$	$I=\frac{2}{5}mR^2$	$I=\frac{1}{12}ml^2$

7.4. LEGILE CINEMATICII ŞI DINAMICII SOLIDULUI RIGID

Să analizăm mişcarea de rotație a unui rigid sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$ sau a unui sistem de forțe, cînd axa de rotație este fixă (fig. 7.8). Asupra fiecărui punct material de masă m_i acționează forța $\vec{F_i}$:

$$\vec{F_i} = m_i \cdot \vec{a_i} \qquad (7.9)$$

unde $\vec{a_i}$ este accelerația mişcării punctului material sub acțiunea forței $\vec{F_i}$.

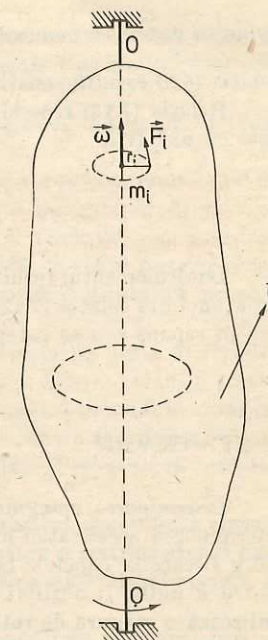


Fig. 7.8. Mişcarea de rotație a unui rigid sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$.

În mişcarea de rotație a rigidului în jurul axei fixe, fiecare punct material se poate deplasa numai în planul perpendicular pe axă pe cercul de rază r_i, unde r_i este distanța de la punctul material m_i pînă la axa de rotație. Astfel, pentru a descrie mişcarea de rotație a punctului material putem considera numai relația între componenta tangențială F_{it} a forței $\vec{F_i}$ şi accelerația tangențială a_{it}:

$$F_{it} = m_i a_{it} \qquad (7.10)$$

adică ecuația (7.9) proiectată pe tangenta la traiectoria circulară a punctului material considerat. Dar:

$$a_{it} = \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \text{ şi } v_i = \omega r_i \text{ şi deci } a_{it} = r_i \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r_i\varepsilon \qquad (7.11)$$

unde $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ este *accelerația unghiulară*.

Înmulțind ambii membri ai ecuației (7.10) cu r_i şi ținînd seama de (7.11) avem:

$$r_iF_{it} = m_ir_i^2\varepsilon. \qquad (7.12)$$

După cum am văzut în paragraful 6.1.2 momentul forței $\vec{F_i}$ față de axa de rotație este definit de produsul dintre componenta transversală $\vec{F}_{i\perp}$ (proiecția forței F_i pe planul perpendicular pe axă) şi brațul acesteia pînă la axă, ceea ce este totuna cu produsul r_iF_{it} dintre componenta tangențială a forței şi distanța de la punctul material la axă. Astfel, notînd $M_{i\|} = r_iF_{it}$, membrul stîng din relația (7.12) reprezintă valoarea momentului forței $\vec{F_i}$ față de axa de rotație. Aşadar, pentru întreg corpul rigid, putem scrie valoarea momentului rezultant față de axa de rotație:

$$M_{\|} = \sum_{i=1}^{n} M_{i\|} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$$

adică:

$$M_{\|} = I\varepsilon \qquad (7.13)$$

unde $I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$ este momentul de inerție al rigidului față de axa de rotație.

Tot în paragraful 6.1.2 am văzut că momentul unei forțe față de o axă este totuna cu proiecția pe axa respectivă a momentului acelei forțe față de un pol de pe axă. Astfel, avînd în vedere că momentul rezultant al forțelor interne față de orice pol este nul, în relația (7.13) $M_{\|}$ reprezintă valoarea momentului rezultant al forțelor externe față de axa de rotație sau, ceea ce este totuna, proiecția pe axa de rotație a momentului rezultant al forțelor externe față de un pol de pe axă.

Observăm că ecuația (7.13) reprezintă particularizarea ecuației (6.9) din paragraful 6.3 la cazul rigidului cu axă fixă. Într-adevăr, valoarea momentului cinetic $J_{i\|}$ al punctului material m_i față de axa de rotație este $J_{i\|} = r_im_iv_i = m_ir_i^2\omega$ de unde rezultă pentru întregul corp rigid:

$$J_{\|} = \sum_{i=1}^{n} J_{i\|} = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2\omega = I\omega.$$

Avînd în vedere că momentul de inerţie I este constant şi că $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon$ şi ţinînd cont de ecuaţia (6.9) rezultă ecuaţia (7.13).

Relaţia (7.13) reprezintă legea a II-a a dinamicii pentru mişcarea de rotaţie a unui rigid cu axă fixă.

Acceleraţia unghiulară imprimată de forţele exterioare unui rigid cu axă fixă de rotaţie este direct proporţională cu momentul rezultant al acestor forţe în raport cu axa de rotaţie.

Dacă momentul rezultant al forţelor exterioare faţă de axa de rotaţie este permanent nul atunci din relaţia (7.13) rezultă că acceleraţia unghiulară ε este nulă deci corpul rigid este în repaus sau se roteşte în jurul axei cu o viteză unghiulară ω constantă.

EXPERIMENT

Determinarea momentului de inerţie al unui corp. Realizăm montajul folosit pentru determinarea acceleraţiei unghiulare (fig. 7.5). Se fixează corpurile cu şurub cu masa de 150 g fiecare la capetele barei. Momentul de inerţie al sistemului este suficient de mare pentru a putea fi neglijat momentul de inerţie al barei. Suspendînd de fir cîrligul, se realizează o mişcare de rotaţie uniformă. Se mai pune apoi un corp cu masa $m = 20$ g care va imprima sistemului o acceleraţie unghiulară ε şi o acceleraţie $\vec{a}$ pe verticală. Din legea fundamentală pentru mişcarea de rotaţie $M = I\varepsilon$ rezultă:

$$I = \frac{M}{\varepsilon}.$$

Din $M = Tr$ unde $T = m(g - a)$ (vezi fig. 7.9) şi $a = \frac{2h}{t^2}$ avem $M = mr\,(g - a)$.

Dar, $\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}$ şi înlocuind în expresia momentului de inerţie I vom obţine:

$$I = \frac{mr^2}{2h}\,(gt^2 - 2h).$$

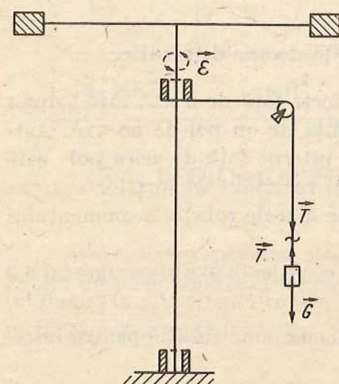


Fig. 7.9. Forţele ce acţionează asupra corpului din experiment.

Se măsoară timpul t de cădere, masa m care produce mişcarea uniform accelerată şi spaţiul h pe care se deplasează discul crestat suspendat de cîrlig. Cu valorile obţinute se calculează momentul de inerţie al sistemului.

Volantul. Pentru ca o maşină să funcţioneze în bune condiţii trebuie ca variaţiile vitezei de mişcare să nu depăşească anumite valori stabilite prin construcţie.

La majoritatea maşinilor se cere menţinerea vitezei constante, astfel încît în orice moment să avem egalitate între energia mecanică primită şi energia consumată de maşină.

În cazul variaţiilor periodice ale vitezei din relaţia $M = I\varepsilon$ care poate fi scrisă şi sub forma $M\,\Delta t = I\,\Delta\omega$ rezultă

$$\Delta\omega = \frac{M\,\Delta t}{I}$$

expresie din care se vede că variaţiile vitezei unghiulare $\Delta\omega$ pentru un moment M al forţei, determinat, sînt cu atît mai mici cu cît momentul de inerţie I al maşinii este mai mare.

Mărirea considerabilă a momentului de inerţie al unei maşini se obţine cu ajutorul unei roţi (disc) mari numită volant, montată pe arborele maşinii.

Volantul reprezintă un „acumulator" de energie cinetică. În decursul unui ciclu de funcţionare al maşinii, în timpul cînd lucrul mecanic al forţelor motoare depăşeşte pe acela al forţelor rezistente, energia cinetică a maşinii creşte şi volantul „acumulează" energie cinetică. Excesul de lucru mecanic al forţelor motoare faţă de cel al forţelor rezistente fiind consumat pentru creşterea energiei cinetice a volantului, acesta va micşora creşterea vitezei maşinii peste valoarea ei medie (de regim).

În timpul cînd lucrul mecanic al forţelor rezistente depăşeşte pe acela al forţelor motoare, energia cinetică a maşinii scade şi deci scade şi viteza maşinii. Volantul „restituie" acum, maşinii, sub formă de lucru mecanic motor, energia cinetică acumulată anterior. O parte din lucrul mecanic al forţelor rezistente consumîndu-se pentru încetinirea volantului, rezultă că în acest interval de timp din ciclul maşinii, volantul micşorează scăderea vitezei sub valoarea ei medie.

În consecinţă, în decursul unui ciclu energetic al maşinii, volantul acumulează energia cinetică în exces pe timpul cît maşina tinde să se ambaleze pentru a o restitui atunci cînd maşina îşi încetineşte mersul, menţinînd astfel variaţiile periodice ale vitezei maşinii în jurul valorii vitezei medii (de regim).

Între mişcarea de translaţie şi mişcarea de rotaţie se poate face un paralelism, o corespondenţă analogică. Mărimile şi ecuaţiile între care se pot stabili corespondenţe sînt date în tabelul care urmează:

Translaţie			**Rotaţie**		
			CINEMATICA		
Mărimea; tipul de mişcare	*Ecuaţia; simbolul*	*Unitatea de măsură*	*Mărimea; tipul de mişcare*	*Ecuaţia; simbolul*	*Unitatea de măsură*
Vectorul deplasare	$\Delta\vec{r}$	m	Unghiul	α	radiani
Timpul	t	s	Timpul	t	s
Viteza	$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	m/s	Viteza unghiulară	$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$	rad/s
Mişcarea uniformă	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$		Rotaţie uniformă	$\alpha = \alpha_0 + \omega t$	
Acceleraţia	$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	m/s²	Acceleraţie unghiulară	$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	rad/s²
Mişcarea uniform variată	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$		Rotaţie uniform variată	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	
	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$			$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	

Mărimea;	*Ecuația; simbolul*	*Unitatea de măsură*	*Mărimea;*	*Ecuația; simbolul*	*Unitatea de măsură*
Masa	m	kg	Momentul de inerție	I	kg · m²
Forța	F	N	Momentul forței	M	N · m
Impulsul	$\vec{p} = m\vec{v}$	kg · m/s	Momentul cinetic	$\vec{J}_{\parallel} = I\omega$	N · m
	$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\vec{a}$			$\vec{M}_{\parallel} = \frac{\Delta \vec{J}_{\parallel}}{\Delta t} = I\vec{\varepsilon}$	
Energia cinetică	$E_c = \frac{1}{2} mv^2$	J	Energia cinetică	$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2$	J

PROBLEME REZOLVATE

1. Pe un plan înclinat de unghi α (fig. 7.10) se lasă liber din punctul cel mai înalt al planului un corp rotund și omogen (cilindru, sferă) de masă m, rază R și moment de inerție I. Se cer: *a)* forța de frecare și coeficientul de frecare minim dintre corp și plan astfel încît corpul să se rostogolească fără să alunece pe plan; *b)* accelerația cu care se deplasează corpul pe plan; *c)* accelerația unghiulară.

Rezolvare. a) Pentru ca între corp și planul înclinat să nu existe alunecare trebuie îndeplinite condițiile:

$$mg \sin\alpha - F_f = ma$$
$$mg \cos\alpha - N = 0$$
$$F_f R = I\varepsilon$$
$$a = \varepsilon R.$$

De unde rezultă:

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \text{ din ultima relație și } F_f R = I\frac{a}{R} \Rightarrow F_f = I\frac{a}{R^2} \text{ sau } a = F_f \frac{R^2}{I}.$$

Înlocuind în prima ecuație: $mg \sin\alpha - F_f = mF_f \frac{R^2}{I}$ rezultă:

$$mg \sin\alpha = F_f\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right); \quad F_f = \frac{mg \sin\alpha}{1 + \frac{mR^2}{I}}.$$

Iar condiția de nealunecare: $F_f < \mu N = \mu mg \cos\alpha$ adică

$$\mu > \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \frac{mR^2}{I}},$$

$$\text{sau } \operatorname{tg}\alpha < \mu\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right).$$

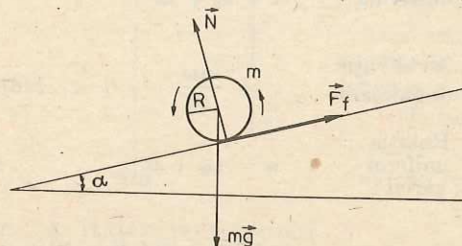


Fig. 7.10. Pentru problema rezolvată 1.

b) Din relațiile de mai sus: $a = \dfrac{g \sin\alpha}{1 + \dfrac{I}{mR^2}}$.

c) $\varepsilon = \dfrac{a}{R} = \dfrac{g \sin\alpha}{R + \dfrac{RI}{mR^2}} = \dfrac{g\sin\alpha}{R + \dfrac{I}{mR}}$.

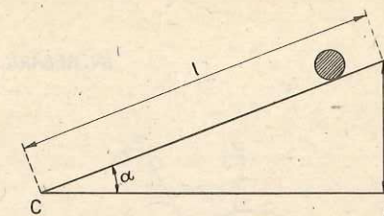


Fig. 7.11. Pentru problema rezolvată 2.

2. Să se determine accelerația cu care se deplasează o sferă care se rostogolește, fără alunecare, pe un plan înclinat de un unghi $\alpha = 30°$.

Rezolvare. În vîrful planului înclinat la înălțimea h față de planul orizontal (fig. 7.11) sfera are energia potențială maximă $E_p = mgh$, iar la baza planului această energie se transformă în energie cinetică. Considerînd sistemul izolat, din legea transformării și conservării energiei rezultă $E_c = E_p$. Energia cinetică a sferei este determinată de energia cinetică de rotație și de energia cinetică de translație, adică:

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

dar $\omega = \dfrac{v}{R}$ (R este raza sferei), deoarece viteza de translație a centrului sferei (centrul de masă) este egală cu viteza periferică cu care se rotește sfera față de centrul său și deci putem scrie:

$$E_c = \frac{Iv^2}{2R^2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right).$$

Din egalitatea $E_c = E_p$ se obține $\dfrac{v^2}{2}\left(\dfrac{I}{R^2} + m\right) = mgh$, de unde rezultă

$$v^2 = \frac{2mgh}{\frac{I}{R^2} + m}.$$

Din ecuația vitezei în mișcarea accelerată $v = \sqrt{2al}$ se obține valoarea accelerației $a = \dfrac{v^2}{2l}$ și înlocuind valoarea lui v^2 se obține:

$$a = \frac{mg}{\frac{I}{R^2} + m} \cdot \frac{h}{l}.$$

Dar $h = l \sin\alpha$ și se obține pentru accelerație

$$a = \frac{mg \sin\alpha}{\frac{I}{R^2} + m}.$$

Știind că momentul de inerție al sferei este $I = \dfrac{2}{5} mR^2$, expresia accelerației devine: $a = \dfrac{mg \sin\alpha}{\dfrac{\frac{2}{5} mR^2}{R^2} + m} = \dfrac{5}{7} g \sin\alpha$ și pentru că $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ valoarea accelerației este $a = 3{,}5$ m/s².

Ca și în cazul mișcării de translație, valoarea accelerației în cazul rostogolirii pe plan nu depinde de masa sferei ci numai de înclinarea planului.

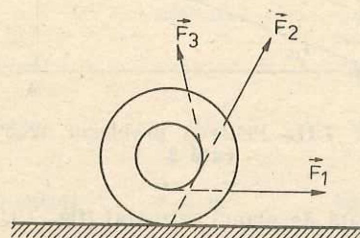


Fig. 7.12. Pentru problema 3.

1. Imaginați-vă un punct pe obada unei roți în mișcare. Dacă roata se mișcă cu viteză unghiulară constantă, are punctul considerat o accelerație normală? Dar tangențială?

2. Se fac experimente cu o sferă omogenă din lemn și cu 2 plane înclinate de unghiuri diferite. Sfera e pusă, pe rînd, pe fiecare plan la aceeași înălțime. Pe care dintre plane viteza la bază este mai mare? Cum vor fi timpii de mișcare? (Sfera se rostogolește fără alunecare.)

R: $v_1' = v_2'$, $t_1/t_2 = (\sin\alpha_2)/(\sin\alpha_1)$.

3. Un mosor avînd un fir subțire înfășurat pe el (fig. 7.12) poate fi acționat succesiv prin intermediul firului de trei forțe după direcțiile indicate în figură. Indicați direcțiile de mișcare posibile ale mosorului pentru fiecare dintre cele trei forțe.

4. Se măsoară viteza unghiulară a unui disc de pick-up și se găsește valoarea $n = 33$ rot/min. Care este viteza liniară a două puncte de pe disc unul aflat la distanța $r_1 = 14{,}9$ cm și altul la distanța $r_2 = 7{,}3$ cm de centrul discului?

R: $v = \omega r = 2\pi rn = 305$ cm/min; 152 cm/min.

5. Viteza unui automobil cu diametrul roților $D = 76$ cm este $v = 96{,}6$ km/h. *a)* Care este viteza unghiulară a roților? *b)* Roțile sînt frînate uniform în timpul a $N = 30$ de rotații. Care este accelerația unghiulară? *c)* Pe ce distanță s-a deplasat automobilul în timpul frînării?

R: $\omega_0 = 2v/D \approx 70$ rad/s; $\varepsilon = \omega_0^2/4\pi N \approx -13$ rad/s²; $s = \pi ND \approx 73$ m.

6. Discul unui pick-up se rotește cu $n = 78$ rot/min. La un moment dat discul încetinește și se oprește după $t_m = 30$ s de la deconectarea motorului. *a)* Să se calculeze accelerația unghiulară a mișcării încetinite. *b)* Numărul de rotații efectuate de disc în acest timp.

R: $\varepsilon = 2\pi n/t_m = 0{,}27$ rad/s²; $N = nt_m/2 = 20$ rotații.

8

ECHILIBRUL MECANIC AL CORPURILOR

8.1. SISTEM DE FORȚE CONCURENTE. REZULTANTA. MIȘCAREA DE TRANSLAȚIE (REDUCEREA LA UN PUNCT MATERIAL)

Starea de echilibru sau de mișcare a unui corp depinde de caracterul legăturilor mecanice cu celelalte corpuri, adică de apăsările, atracțiile sau respingerile ce rezultă din acțiunile lor reciproce. După cum știm, corpurile din natură acționează unele asupra altora reciproc, aceste interacțiuni fiind caracterizate prin forțe, care sînt mărimi vectoriale.

Dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe spunem că acestea formează un *sistem de forțe*. Cînd suporturile forțelor se întîlnesc în același punct, forțele sînt *concurente*.

Să considerăm un corp asupra căruia acționează sistemul de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$ aplicate în punctele A, B și C (fig. 8.1). Dacă se înlocuiește sistemul de forțe dat prin alt sistem, care produce aceleași efecte asupra corpului ca și sistemul inițial, spunem că cele două *sisteme de forțe sînt echivalente*. Două sisteme de forțe echivalente cu un al treilea sînt și ele echivalente. Dacă sistemul dat este echivalent cu o singură forță, aceasta este *rezultanta* sistemului de forțe.

Rezultanta forțelor se obține prin operația de compunere a forțelor, care este identică cu operația de compunere a vectorilor cunoscută din paragraful 1.6.

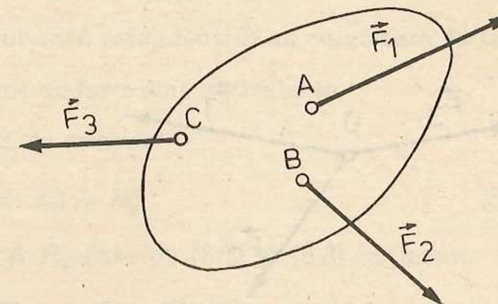


Fig. 8.1. Forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$ care acționează simultan asupra unui solid constituie un sistem de forțe.

În cazul cînd corpul este un punct material, adică dimensiunile lui sînt neglijabile, distanțele dintre punctele de aplicație ale forțelor fiind foarte mici, acestea se pot confunda cu un singur punct pe care îl notăm cu O (fig. 8.2). Rezultă că forțele care acționează asupra unui punct material sînt concurente.

Ca urmare a neglijării dimensiunilor corpului, acesta nu poate efectua mișcări de rotație în jurul vreunei axe trecînd prin el însuși. Punctul material poate efectua numai mișcări de translație sub acțiunea forțelor care acționează asupra lui.

8.1.1. Compunerea forțelor prin metoda analitică. Asupra metodelor grafice de compunere a forțelor, cum ar fi metoda paralelogramului sau metoda poligonului forțelor, nu vom mai insista ele fiind cunoscute din paragraful 1.6, unde au fost aplicate pentru compunerea vectorilor. Vom prezenta numai metoda analitică de compunere a forțelor.

Metoda analitică de compunere a forțelor se bazează pe noțiunea de proiecție a forței pe o axă.

Proiectăm o forță $\vec{F}$ pe axele perpendiculare Ox și Oy, ducînd din extremitățile A și B ale forței, perpendiculare pe aceste axe (fig. 8.3).

Componentele forței $\vec{F}$ pe axele de coordonate Ox și Oy sînt date de formulele:

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \sin \alpha. \tag{8.1}$$

Vom aplica metoda analitică pentru determinarea rezultantei a două forțe coplanare $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care fac între ele unghiul α. Metoda comportă următoarele etape:

1. Se ia un sistem de axe perpendiculare xOy orientat astfel încît axa Ox să aibă orientarea uneia dintre forțe. Apoi se proiectează fiecare forță pe cele două axe (fig. 8.4) și se obține:

$$F_{1x} = F_1; \quad F_{1y} = 0,$$
$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha; \quad F_{2y} = F_2 \sin \alpha.$$

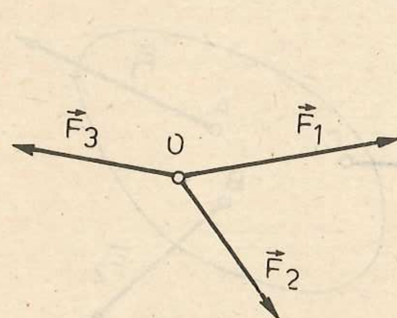


Fig. 8.2. Forțele care acționează asupra unui punct material sînt forțe concurente.

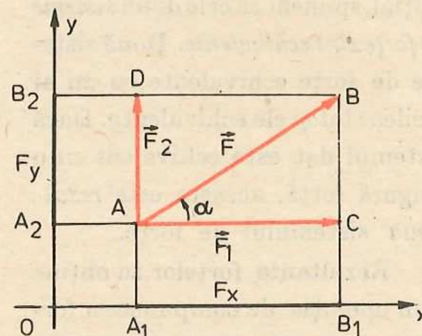
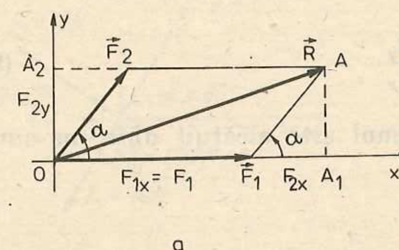


Fig. 8.3. Componentele forței $\vec{F}$ pe axele de coordonate Ox și Oy sînt date de relațiile: $F_x = F \cos \alpha$; $F_y = F \sin \alpha$.



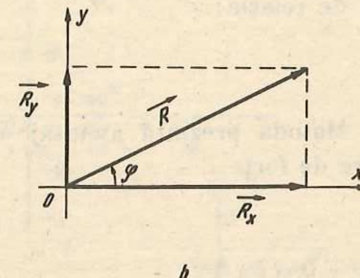


Fig. 8.4. *a)* Suma componentelor forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ pe axele de coordonate este egală cu componentele rezultantei $\vec{R}$, pe aceleași axe. *b)* Sistemul de forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ este înlocuit cu sistemul de forțe echivalent $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$. Aceste sisteme de forțe admit aceeași rezultantă $\vec{R}$.

În paragraful 1.6 s-a demonstrat că orice sumă de vectori poate fi proiectată pe o axă oarecare și se obține o sumă corespunzătoare pentru proiecțiile vectorilor. Proiecția rezultantei fiind egală cu suma proiecțiilor forțelor. Aplicăm acest rezultat și în cazul forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$. După cum rezultă și din figura 8.4, *a*, suma componentelor forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, pe axele Ox și Oy este egală cu componenta rezultantei $\vec{R}$, pe aceleași axe, deci:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 + F_2 \cos \alpha, \tag{8.2}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + F_2 \sin \alpha. \tag{8.3}$$

2. Sistemul inițial de forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ este înlocuit cu un sistem echivalent de forțe $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$, care fac între ele un unghi drept (fig. 8.4,*b*). Rezultanta $\vec{R}$, a acestor două forțe este dată de diagonala dreptunghiului care are forțele $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$ drept laturi. Această rezultantă este identică cu rezultanta forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, deoarece cele două sisteme de forțe sînt echivalente.

Modulul rezultantei $\vec{R}$ este dat de relația:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2. \tag{8.4}$$

Înlocuind în (8.4) valorile lui R_x și R_y date de (8.2) și (8.3) obținem:

$$R^2 = (F_1 + F_2 \cos \alpha)^2 + F_2^2 \sin^2 \alpha,$$

sau, după efectuarea calculelor:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha. \tag{8.5}$$

Unghiul φ, care dă orientarea rezultantei R față de axa Ox (fig. 8.4, b) este dat de relația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_y}{R_x}. \tag{8.6}$$

Metoda prezintă avantaj, cînd sistemul este alcătuit dintr-un număr mare de forțe.

EXEMPLE

1. Asupra unui punct material acționează un sistem de forțe alcătuit din cinci forțe concurente, așa cum se indică în figura 8.5, a. Să se determine rezultanta acestui sistem de forțe.

Rezolvare. În cazul acestui exemplu este avantajos să se aleagă axa Ox pe direcția forței $\vec{F}_1$ și axa Oy pe direcția forței $\vec{F}_5$ (fig. 8.5, b). Se descompune fiecare forță în două componente după direcțiile axelor Ox și Oy (fig. 8.5, b). În locul celor cinci forțe, orientate după direcții oarecare, am obținut șapte forțe colineare pe două axe perpendiculare. Valoarea numerică a rezultantei forțelor pe direcțiile Ox și Oy este egală cu suma algebrică a valorilor numerice a forțelor componente:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{5x},$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{5y}.$$

Astfel sistemul dat a fost redus la două forțe R_x și R_y, care au direcțiile perpendiculare. Rezultanta acestor forțe este dată de diagonala dreptunghiului care are ca laturi forțele R_x și R_y (fig. 8.5, c). Mărimea rezultantei este dată de relația:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Pentru efectuarea calculelor este foarte comod să se folosească tabelul următor:

Forța (N)		Componenta pe axa Ox (N)	Componenta pe axa Oy (N)
F_1	15	$15 \cos 0° = 15$	$15 \sin 0° = 0$
F_2	12	$12 \cos 60° = 6$	$12 \sin 60° = 10{,}39$
F_3	10	$-10 \cos 37 = -8$	$10 \sin 37° = 6$
F_4	10	$-10 \cos 60° = -5$	$-10 \sin 60° = -8{,}66$
F_5	1,73	$1{,}73 \cos 90° = 0$	$-1{,}73 \sin 90° = -1{,}73$

$$R_x = \sum_{i=1}^{5} F_{ix} = 8 \text{ N}; \quad R_y = \sum_{i=1}^{5} F_{iy} = 6 \text{ N}$$

Valoarea numerică a rezultantei este dată de relația:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ N}.$$

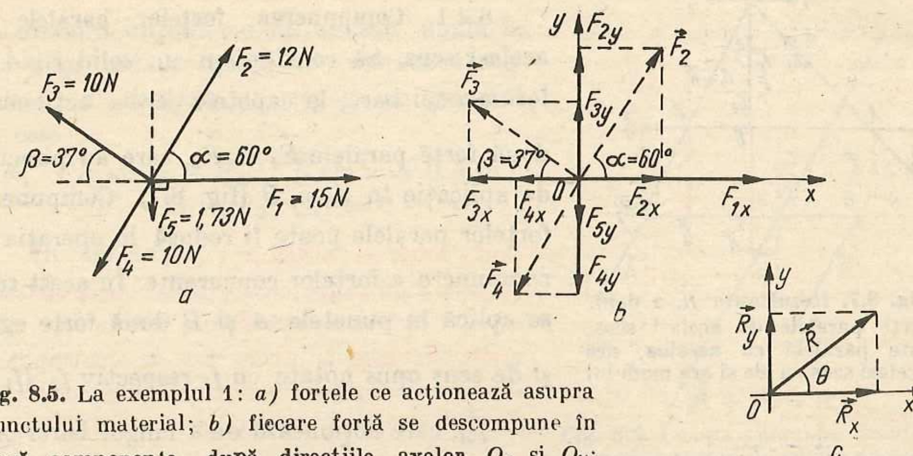


Fig. 8.5. La exemplul 1: a) forțele ce acționează asupra punctului material; b) fiecare forță se descompune în două componente, după direcțiile axelor Ox și Oy; (c rezultanta $\vec{R}$ a forțelor este diagonala dreptunghiului

Unghiul de orientare al rezultantei față de axa Ox este dat de relația:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{6}{8} = 0{,}75; \quad \theta = 37°.$$

2. Să se determine rezultanta a trei forțe coplanare și concurente care au valorile numerice $F_1 = F_2 = F_3 = 200$ N. Unghiul dintre prima și a doua forță este egal cu unghiul dintre a doua și a treia forță și egal cu 60° (fig. 8.6, a).

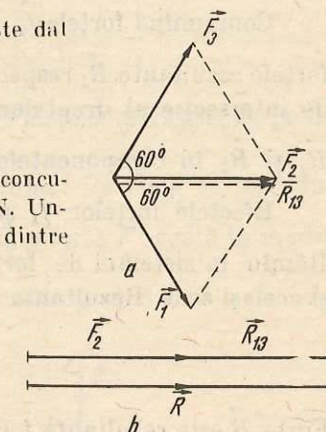


Fig. 8.6. La exemplul 2.

Rezolvare. Compunem mai întîi forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$ după regula paralelogramului (fig. 8.6, a). Rezultanta $\vec{R}_{13}$, a forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$, are aceeași direcție, sens și valoare numerică ca și forța $\vec{F}_2$. Valoarea numerică a rezultantei sistemului de forțe este:

$$R = R_{13} + F_2 = 400 \text{ N}$$

8.2. COMPUNEREA FORȚELOR PARALELE. CUPLUL DE FORȚE. MIȘCAREA DE ROTAȚIE (IREDUCTIBILITATEA LA PUNCT MATERIAL)

Considerăm un solid rigid, adică, un sistem mecanic în care distanțele dintre elementele care îl alcătuiesc nu se modifică în procesul mișcării mecanice. Solidul rigid, sub acțiunea unui sistem de forțe poate efectua o mișcare de translație, o mișcare de rotație sau amîndouă mișcările simultan. Considerăm că solidul este acționat de un sistem de forțe paralele. Vom determina rezultanta sistemului de forțe paralele în două cazuri particulare.

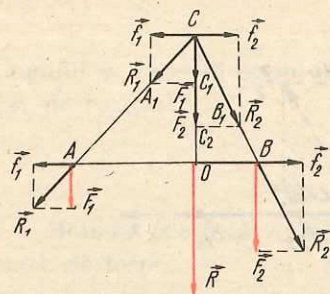


Fig. 8.7. Rezultanta $\vec{R}$, a două forțe paralele de același sens, este paralelă cu acestea, are același sens ca ele și are modulul $R = F_1 + F_2$.

8.2.1. **Compunerea forțelor paralele de același sens.** Să considerăm un solid rigid de forma unei bare, la capetele căreia acționează două forțe paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, care au punctele de aplicație în A și B (fig. 8.7). Compunerea forțelor paralele poate fi redusă la operația de compunere a forțelor concurente. În acest scop se aplică în punctele A și B două forțe egale și de sens opus notate cu $\vec{f}_1$ respectiv $\vec{f}_2$ $(\vec{f}_1 = -\vec{f}_2)$, care acționează de-a lungul barei AB. Forțele $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$, fiind egale și de sens contrar, nu au nici o influență asupra stării de mișcare sau de repaus a solidului rigid.

Compunînd forțele $\vec{f}_1$, $\vec{F}_1$ și $\vec{f}_2$, $\vec{F}_2$ după regula paralelogramului, obținem forțele rezultante $\vec{R}_1$ respectiv $\vec{R}_2$. Deplasăm forțele $\vec{R}_1$ și $\vec{R}_2$ pînă în punctul C de intersecție al dreptelor lor suport. În acest punct descompunem forțele $\vec{R}_1$ și $\vec{R}_2$ în componentele lor inițiale.

Efectele forțelor $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$ anulîndu-se reciproc, le eliminăm din sistem. Rămîn în sistemul de forțe numai $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care au aceeași dreaptă suport și același sens. Rezultanta lor are deci modulul:

$$R = F_1 + F_2.$$

Forța $\vec{R}$ este rezultanta forțelor paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ aplicate în A și B. Punctul O de aplicație al forței $\vec{R}$, îl determinăm ținînd seamă de asemănarea triunghiurilor AOC și A_1C_1C, și a triunghiurilor BOC și B_1C_2C.

Dacă notăm AO cu b_1 și OB cu b_2, din asemănarea triunghiurilor amintite mai sus, obținem:

$$\frac{b_1}{f_1} = \frac{OC}{F_1} \text{ și } \frac{b_2}{f_2} = \frac{OC}{F_2}.$$

Împărțind relațiile de mai sus membru cu membru, obținem:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{F_2}{F_1} \text{ sau } F_1 b_1 = F_2 b_2. \qquad (8.7)$$

Relația (8.7) ne permite să determinăm poziția punctului de aplicație O, al rezultantei $\vec{R}$. Această relație este independentă de schimbarea direcției forțelor paralele în raport cu solidul. Dacă forțele paralele sînt rotite față

de direcția inițială cu un anumit unghi β, așa cum indică figura 8.8, momentul rezultant al forțelor în raport cu punctul C, este:

$$F_1 \cdot CA \sin \alpha - F_2 \cdot CB \sin \alpha = 0, \text{ sau}$$
$$F_1 \cdot CA - F_2 \cdot CB = 0.$$

În concluzie, *rezultanta a două forțe paralele și de același sens, aplicate aceluiași solid, este o forță paralelă și de același sens cu componentele și are modulul egal cu suma modulelor componentelor. Punctul de aplicație al rezultantei împarte segmentul de dreaptă care unește punctele de aplicație ale componentelor în două segmente invers proporționale cu modulele forțelor componente.*

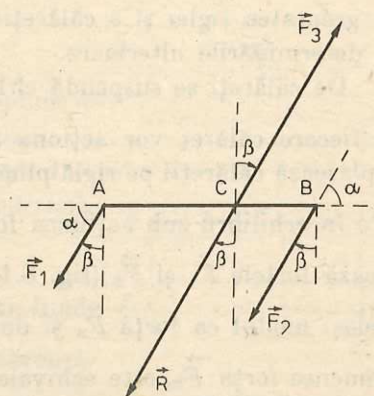


Fig. 8.8. Poziția punctului de aplicație al rezultantei forțelor paralele este independentă de schimbarea direcției forțelor paralele în raport cu solidul asupra căruia acționează.

EXPERIMENTE

Pentru verificarea experimentală a compunerii forțelor paralele, se poate folosi dispozitivul prezentat în figura 8.9.

Se suspendă rigla gradată *1*, de dinamometrul *2*. Pe riglă se introduc călăreți, notați pe figură cu *3*. Dinamometrul indică o forță $\vec{F}'$ egală în modul

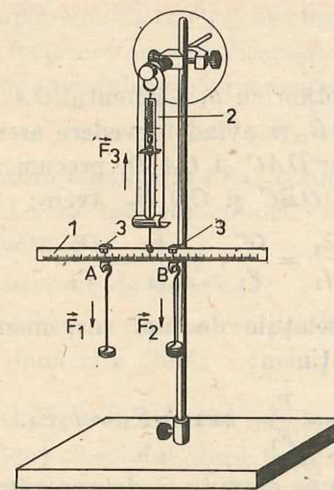


Fig. 8.9. Dispozitiv pentru studiul compunerii forțelor paralele.

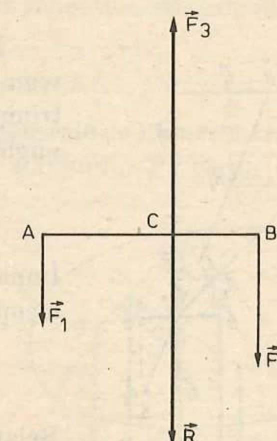


Fig. 8.10. Rezultanta forțelor paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ este o forță paralelă cu forțele componente și de modul egal cu suma modulelor componentelor.

cu greutatea riglei şi a călăreţilor. Se ţine seamă de mărimea acestei forţe în determinările ulterioare.

De călăreţi se suspendă cîrlige cu discuri crestate. Discurile suspendate de fiecare călăreţ vor acţiona asupra riglei cu forţele $\vec{F}_1$ respectiv $\vec{F}_2$. Se deplasează călăreţii pe riglă pînă se obţine poziţia orizontală a acesteia. Rigla este în echilibru sub acţiunea forţelor paralele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$. Forţa $\vec{F}_3$ echilibrează forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ (fig. 8.10). Forţa $\vec{R} = -\vec{F}_3$, de acelaşi suport şi de acelaşi modul ca forţa $\vec{F}_3$ şi de sens opus acesteia, care poate echilibra de asemenea forţa $\vec{F}_3$, este echivalentă cu sistemul de forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$. Forţa $\vec{R}$ este deci rezultanta forţelor paralele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, şi experimentul demonstrează că:

a) forţa $\vec{R}$ are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens ca şi forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$, deoarece $\vec{R} = -\vec{F}_3$;

b) $R = F_1 + F_2$.

8.2.2. **Compunerea forţelor paralele de sens opus.** Pentru compunerea forţelor paralele de sens opus vom proceda la fel ca la compunerea forţelor paralele de acelaşi sens (fig. 8.11). Conform figurii 8.11, rezultă că:

a) forţa rezultantă $\vec{R}$ are direcţia forţelor $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ şi sensul forţei $\vec{F}_2$, adică sensul forţei celei mai mari;

b) modulul forţei $\vec{R}$ este egal cu diferenţa modulelor forţelor componente:

$$R = F_2 - F_1.$$

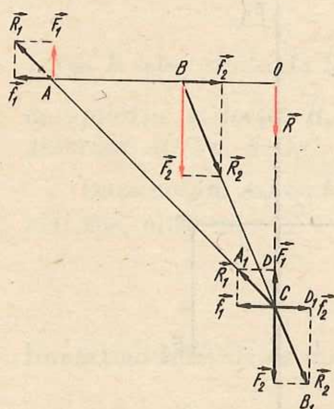


Fig. 8.11. Rezultanta $\vec{R}$, a două forţe paralele de sens contrar, este o forţă paralelă cu acestea şi are sensul forţei celei mai mari. Modulul rezultantei este $R = F_2 - F_1$.

Dacă notăm cu b_1 segmentul OA şi cu b_2 segmentul OB, şi avînd în vedere asemănarea triunghiurilor OAC şi CA_1D, precum şi a triunghiurilor OBC şi CD_1B_1, avem:

$$\frac{b_1}{f_1} = \frac{OC}{F_1}, \text{ şi } \frac{b_2}{f_2} = \frac{OC}{F_2}.$$

Împărţind relaţiile de mai sus, membru cu membru, obţinem:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ sau } b_1F_1 = b_2F_2. \quad (8.8)$$

Relaţia (8.8) ne permite să determinăm poziţia punctului de aplicaţie al rezultantei. Pe figura 8.11 se observă că el este în afara segmentului AB ce uneşte punctele de aplicaţie ale componentelor, şi situat de partea forţei celei mai mari.

EXPERIMENT

Pentru verificarea experimentală a compunerii forţelor paralele de sens opus vom folosi dispozitivul prezentat în figura 8.9. Rigla folosită în acest dispozitiv este în echilibru sub acţiunea forţelor paralele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$.

Forţele paralele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$ (fig. 8.12) fiind în echilibru, putem spune că forţa $\vec{F}_2$ echilibrează forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_3$ şi că forţa $\vec{R} = -\vec{F}_2$ este rezultanta forţelor $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_3$:

$$\vec{R} = -\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3.$$

Modulul rezultantei este dat de relaţia:

$$R = F_3 - F_1.$$

Fig. 8.12. Rezultanta forţelor $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_3$, paralele şi de sens opus, este paralelă cu forţele componente şi are sensul forţei celei mai mari în modul. Modulul rezultantei este egal cu diferenţa modulelor componentelor.

8.2.3. **Compunerea unui număr oarecare de forţe paralele.** Fie un sistem de forţe paralele de acelaşi sens $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, care acţionează asupra unui solid (fig. 8.13). Se compun forţele două cîte două. Se compun mai întîi forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$. Apoi rezultanta $\vec{R}_1$ se compune cu forţa $\vec{F}_3$. Noua rezultantă $\vec{R}_2$ se compune cu forţa $\vec{F}_4$ şi aşa mai departe. Rezultanta generală $\vec{R}$ a sistemului de forţe are aceeaşi direcţie ca şi componentele sale; modulul său este egal cu suma modulelor componentelor:

$$R = F_1 + F_2 + ... + F_n.$$

Punctul de aplicaţie C al rezultantei generale se numeşte *centrul forţelor paralele*. Acesta este un punct fix al solidului, a cărui poziţie este independentă de:

a) sistemul de referinţă;

b) ordinea în care se compun forţele paralele, două cîte două;

c) schimbarea direcţiei forţelor paralele în raport cu solidul (dacă toate forţele paralele se rotesc cu acelaşi unghi în raport cu solidul);

d) modificarea modulelor forţelor paralele în acelaşi raport (spre exemplu dacă toate modulele se micşorează sau se măresc de n ori în raport cu valoarea lor iniţială).

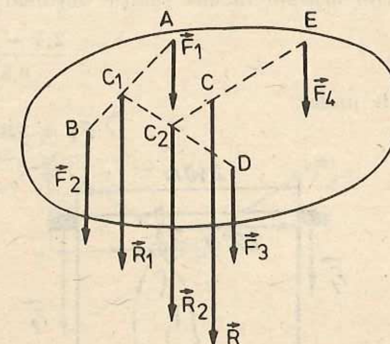


Fig. 8.13. Rezultanta unui sistem de forţe paralele este aplicată într-un punct numit centrul forţelor paralele.

Dacă forţele paralele nu au toate acelaşi sens, se compun mai întîi forţele de un anumit sens şi apoi forţele de sens contrar. Se obţin două rezultante parţiale, paralele şi de sens opus. Prin compunerea rezultantelor parţiale se obţine rezultanta generală, cu punctul de aplicaţie în centrul forţelor paralele.

Se poate întîmpla ca rezultantele parţiale de sensuri opuse să aibă modulele egale şi suporturile diferite, atunci ele alcătuiesc un *cuplu de forţe.*

8.2.4. **Descompunerea unei forţe în două componente paralele cu ea.** Cu ajutorul relaţiilor (8.7) şi (8.8) se pot rezolva problemele de descompunere a unei forţe date în două forţe paralele cu forţa dată şi orientate în acelaşi sens sau în sens opus.

EXEMPLE

1. Extremităţile unei bare de masă neglijabilă şi de lungime $l=2{,}4$ m sînt aşezate pe doi stîlpi. La distanţa $b_1 = 1{,}6$ m de unul dintre stîlpi, se suspendă un corp cu greutatea $G = 640$ N. Să se calculeze forţele de apăsare pe fiecare dintre stîlpi.

Rezolvare. Fie $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ forţele care se exercită pe stîlpii care susţin bara (fig. 8.14). Conform relaţiei (8.7), avem:

$$\frac{b_1}{l - b_1} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ sau } \frac{b_1}{l - b_1 + b_1} = \frac{F_2}{F_1 + F_2},$$

cum $F_1 + F_2 = G$ obţinem:

$$F_2 = 427 \text{ N}; \; F_1 = 213 \text{ N}.$$

2. Extremitatea unei bare de greutate neglijabilă şi de lungime $l = 2{,}4$ m este fixată într-un perete. La distanţa $d = 1{,}6$ m de perete, bara este susţinută de un stîlp (fig. 8.15). La extremitatea liberă a barei acţionează o forţă $F = 640$ N. Să se calculeze forţele cu care bara apasă asupra peretelui şi asupra stîlpului.

Rezolvare. Forţa $\vec{F}$, aşa cum rezultă din enunţ, este descompusă în două componente paralele şi de sens opus. Mărimile acestor componente le calculăm folosind relaţia (8.8):

$$\frac{l}{l - d} = \frac{F_2}{F_1} \text{ sau } \frac{2{,}4}{0{,}8} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Din această ultimă relaţie obţinem:

$$\frac{2{,}4 - 0{,}8}{0{,}8} = \frac{F_2 - F_1}{F_1},$$

de unde

$$F_1 = 320 \text{ N}; \; F_2 = 960 \text{ N}.$$

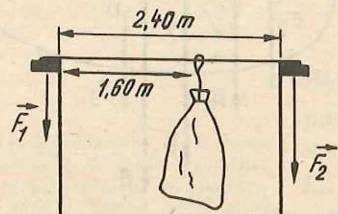


Fig. 8.14. La exemplul 1

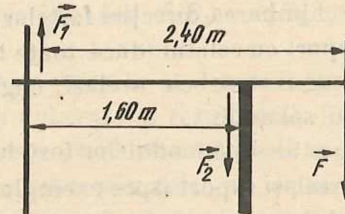


Fig. 8.15. La exemplul 2.

8.2.5. **Cuplul de forţe.** Cuplul de forţe este un sistem de două forţe paralele, de sensuri contrare, de acelaşi modul şi de suporturi diferite, aplicate aceluiaşi solid. Planul definit de cele două forţe se numeşte planul cuplului, iar distanţa dintre suporturile lor se numeşte *braţul cuplului* (fig. 8.16). Cu toate că rezultanta cuplului $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ (ceea ce face să nu existe mişcare de translaţie), totuşi cuplul are o acţiune bine determinată asupra corpului căruia i se aplică, rotindu-l în jurul unei axe perpendiculare pe planul cuplului.

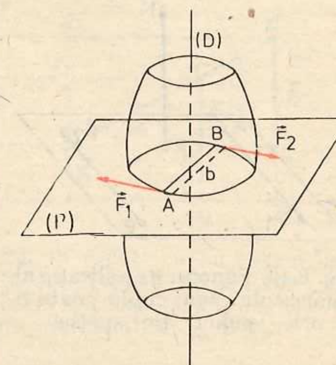


Fig. 8.16. Cuplul de forţe.

Exemple de cupluri de forţe: acţiunea mîinilor asupra unui volan de automobil sau asupra ghidonului unei biciclete, acţiunea tijei unei şurubelniţe asupra crestăturii unui şurub, acţiunea mîinii asupra unui tirbuşon (fig. 8.17).

8.2.6. **Momentul unui cuplu.** Momentul unui cuplu de forţe este acelaşi în raport cu orice punct din spaţiu, fiind o proprietate intrinsecă a cuplului (fig. 8.18).

Să considerăm un punct oarecare O din spaţiu. Momentul cuplului în raport cu acest punct este:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F},$$

deoarece $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$.

Dar $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_0$ deci

$$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{F}. \tag{8.9}$$

Momentul cuplului este perpendicular pe planul definit de forţele $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ şi are modulul

$$M = Fr_0 \sin \alpha = Fb, \tag{8.10}$$

unde $b = r_0 \sin \alpha$ este braţul cuplului.

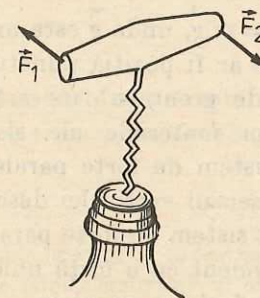


Fig. 8.17. Cuplul de forţe are ca efect producerea unei mişcări de rotaţie.

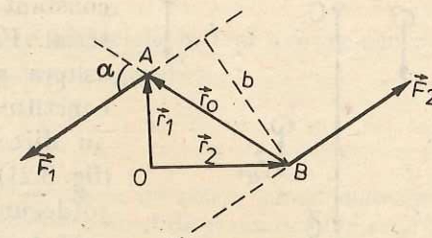


Fig. 8.18. Momentul unui cuplu.

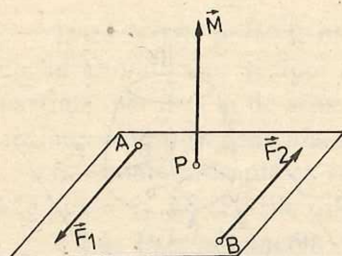


Fig. 8.19. Punctul de aplicație al momentului unui cuplu poate fi orice punct din spațiu.

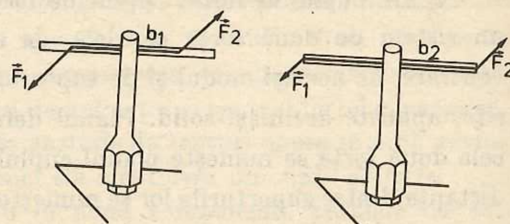


Fig. 8.20. Două cupluri sînt echivalente cînd produc același efect.

Sensul momentului cuplului coincide cu sensul de înaintare al unui șurub drept, a cărui axă coincide cu suportul momentului, pe care îl rotim în sensul în care cuplul tinde să rotească corpul.

Punctul de aplicație al momentului cuplului poate fi orice punct din spațiu (fig. 8.19) (în cazul corpurilor rigide).

Două sau mai multe cupluri se spune că sînt echivalente, dacă aplicate succesiv aceluiași corp, produc același efect (fig. 8.20). Cuplurile echivalente se pot înlocui unul cu altul. Toate cuplurile echivalente au același moment, deoarece efectul de rotație este caracterizat numai de către momentul cuplului. **În cazul corpurilor rigide un cuplu poate fi rotit, deplasat în propriul său plan sau într-un plan paralel, efectul său rămînînd același, deoarece momentul său nu se modifică.**

8.3. CENTRUL DE GREUTATE

8.3.1. **Centrul de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale.** Considerăm un sistem alcătuit din n puncte materiale $A_1, A_2, ..., A_n$, de mase respective $m_1, m_2, ... m_n$, care au pozițiile fixe unele față de altele deoarece sistemul este nedeformabil. Sistemul de puncte materiale este plasat în cîmpul gravitațional uniform. Fiecare punct al sistemului este supus acțiunii unei forțe de greutate $\vec{G}_i = m_i\vec{g}$, unde $\vec{g}$ este un vector constant oricare ar fi poziția punctului material. Forțele de greutate care acționează asupra punctelor materiale ale sistemului constituie un sistem de forțe paralele, care au direcția și sensul verticalei descendente (fig. 8.21). Acest sistem de forțe paralele este totdeauna echivalent cu o forță unică, aplicată în centrul forțelor paralele.

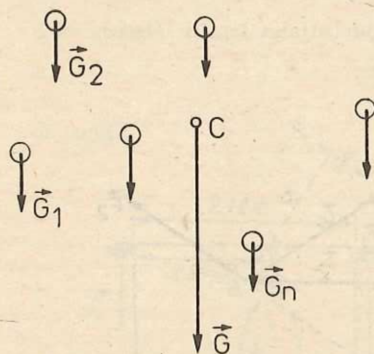


Fig. 8.21. Centrul de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale.

Centrul forțelor de greutate paralele se numește *centrul de greutate* al sistemului, iar forța unică $\vec{G}$, echivalentă cu forțele sistemului, se numește *greutatea sistemului de puncte materiale*.

Modulul forței $\vec{G}$ este dat de relația:

$$G = m_1g + m_2g + ... + m_ng = (m_1 + m_2 + ... + m_n)g,$$

sau

$$G = Mg, \quad (8.11)$$

unde $M = m_1 + m_2 + ... + m_n$, reprezintă masa sistemului de puncte materiale. Centrul de greutate se comportă ca un punct material de masă M, egală cu suma maselor m_i ale tuturor punctelor materiale ale sistemului.

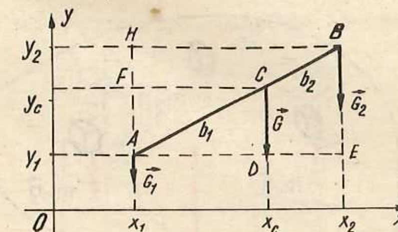


Fig. 8.22. În raport cu un sistem de referință fix, centrul de greutate al unui sistem de două puncte materiale are coordonatele x_c și y_c.

Vom determina poziția centrului de greutate al unui sistem de 2 puncte materiale în raport cu un sistem de coordonate.

Considerăm deci un sistem alcătuit din două puncte materiale de mase m_1 și m_2 și de coordonate x_1, y_1 și x_2, y_2, raportate la un sistem de axe perpendiculare xOy (fig. 8.22).

Forțele paralele $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$ și $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$ au drept rezultantă forța $\vec{G}$, cu punctul de aplicație în C, numit centru de greutate. Conform relației (8.7), avem

$$G_1b_1 = G_2b_2, \text{ sau } \frac{b_1}{b_2} = \frac{G_2}{G_1}. \quad (8.12)$$

Din asemănarea triunghiurilor AEB și ADC, precum și a triunghiurilor AHB și AFC (fig. 8.22), obținem:

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{b_1}{b_2} \text{ și } \frac{y_c - y_1}{y_2 - y_c} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (8.13)$$

Comparînd relațiile (8.12) și (8.13), obținem:

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{G_2}{G_1} \text{ și } \frac{y_c - y_1}{y_2 - y_c} = \frac{G_2}{G_1}.$$

Aceste relații ne permit să determinăm coordonatele centrului de greutate:

$$x_c = \frac{G_1x_1 + G_2x_2}{G_1 + G_2}; \quad y_c = \frac{G_1y_1 + G_2y_2}{G_1 + G_2}. \quad (8.14)$$

Dacă raportăm sistemul de puncte materiale la trei axe de coordonate, obținem a treia coordonată a centrului de greutate:

$$z_c = \frac{G_1z_1 + G_2z_2}{G_1 + G_2}. \quad (8.15)$$

Relațiile (8.14) și (8.15) se pot generaliza pentru un sistem format dintr-un număr oarecare de puncte materiale și obținem pentru centrul de greutate al acestui sistem, coordonatele:

$$x_c = \frac{G_1x_1 + ... + G_nx_n}{G_1 + G_2 + ... + G_n}, \quad y_c = \frac{G_1y_1 + ... + G_ny_n}{G_1 + G_2 + ... + G_n}, \quad z_c = \frac{G_1z_1 + ... + G_nz_n}{G_1 + G_2 + ... + G_n}. \quad (8.16)$$

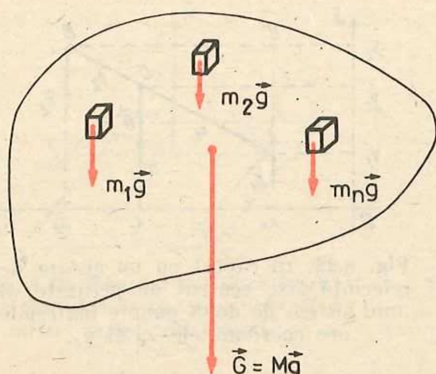


Fig. 8.23. Poziția centrului de greutate al unui solid este independentă de orientarea solidului în raport cu un sistem de referință fix.

Centrul de greutate are următoarele proprietăți:

a) poziția centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale față de punctele sistemului este independentă de poziția sistemului față de sistemul de referință;

b) dacă sistemul de puncte materiale are un centru de simetrie, acest punct coincide întotdeauna cu centrul de greutate al sistemului;

c) dacă sistemul de puncte materiale are o axă de simetrie, centrul de greutate al sistemului este situat pe această axă;

d) dacă sistemul de puncte materiale are un plan de simetrie, centrul de greutate este situat în acest plan.

8.3.2. **Centrul de greutate al unui solid rigid.** Orice corp solid poate fi descompus mintal într-un număr foarte mare de elemente de volum, foarte mici, care pot fi aproximate prin puncte materiale. Fiecare punct material de masă m_i este supus unei forțe de greutate $m_i\vec{g}$ (fig. 8.23). Totalitatea forțelor de greutate care se exercită asupra elementelor de volum de masă m_i, constituie un sistem de forțe paralele. Rezultanta $\vec{G}$ a sistemului de forțe paralele este greutatea corpului și are punctul de aplicație în centrul forțelor paralele, care este centrul de greutate al corpului.

Centrul de greutate este un punct fix al corpului ale cărui proprietăți sînt identice cu acelea ale centrului de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale. În plus trebuie să menționăm că poziția centrului de greutate al unui solid omogen este independentă de masa cuprinsă în același contur. Spre exemplu, centrul de greutate al unei sticle goale are aceeași poziție ca și centrul de greutate al aceleiași sticle umplută complet cu un lichid. Deci toate centrele de greutate ocupă poziții identice în raport cu contururi identice.

Centrul de greutate al unui corp omogen și cu formă geometrică regulată depinde de elementele geometrice ale corpului, nu și de natura materialului din care este alcătuit. Dacă aceste corpuri au un plan, o axă sau un centru de simetrie, atunci centrul de greutate se găsește în planul, pe axa sau în centrul de simetrie respectiv. Spre exemplu, centrul unei bare omogene se află la mijlocul său; al unui disc circular omogen se află în centrul său; al unei sfere omogene se află în centrul sferei; al unui cilindru se află la jumătatea înălțimii cilindrului etc. Centrul de greutate al unei plăci triunghiulare se află la intersecția medianelor triunghiului.

Experimental centrul de greutate al unui corp se determină în felul următor. Se suspendă corpul într-un punct al său A, de care se leagă un fir cu plumb. Direcția firului se marchează pe corp. Apoi se suspendă corpul într-un alt punct al său B și se marchează, din nou pe corp, direcția firului cu plumb. Intersecția celor două linii marcate pe corp arată poziția centrului de greutate C (fig. 8.24). Se poate verifica experimental că centrul de greutate al unui corp este un punct unic.

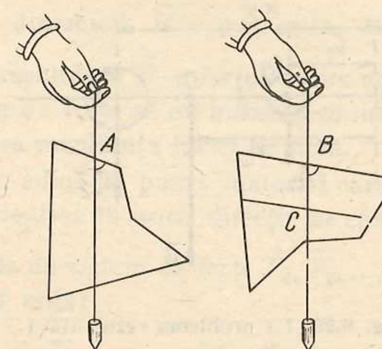


Fig. 8.24. Determinarea experimentală a centrului de greutate al unui corp.

După cum se poate arăta, într-un cîmp gravitațional omogen, centrul de greutate coincide cu centrul de masă. Totuși noțiunea de centru de masă este mai generală decît aceea de centru de greutate, deoarece centrul de masă al unui sistem fizic se poate determina întotdeauna, independent de forțele gravitaționale, ceea ce nu este adevărat pentru centrul de greutate. Spre exemplu, un experimentator din spațiul cosmic, aflat într-un satelit, nu va putea să determine centrul de greutate al unui obiect deoarece forța gravitațională nu are nici un efect în locul în care se face experimentul. În schimb, experimentatorul va putea determina centrul de masă al obiectului.

EXEMPLE

1. Pe o tijă rigidă de masă neglijabilă sînt introduse două sfere O_1 și O_2 de mase respective m_1 și m_2. Centrele sferelor se află la distanțele x_1 respectiv x_2 de extremitatea O a tijei (fig. 8.25). Să se determine poziția centrului de greutate al sistemului alcătuit din cele două sfere.

Rezolvare. Greutatea $\vec{G}$ a sistemului alcătuit din cele două sfere este aplicată în punctul C, centrul de greutate al sistemului.

Momentul forței rezultante $\vec{G}$, în raport cu punctul O, este egal cu suma momentelor forțelor componente în raport cu același punct, deci:

$$Gx_C = G_1x_1 + G_2x_2,$$

de unde

$$x_C = \frac{G_1x_1 + G_2x_2}{G_1 + G_2},$$

deoarece $G = G_1 + G_2$.

2. Să se determine poziția centrului de greutate C al unui disc omogen cu grosimea uniformă și de diametru $D_1 = 40$ cm, din care s-a tăiat o bucată circulară cu diametrul $D_2 = 10$ cm. Centrul O_2 al orificiului circular se află la 10 cm de centrul O_1 al discului dat (fig. 8.26).

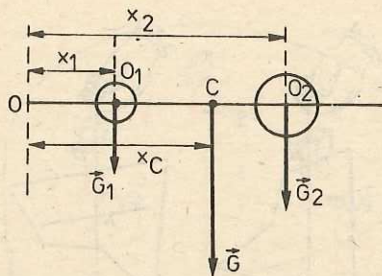


Fig. 8.25. La problema rezolvată 1.

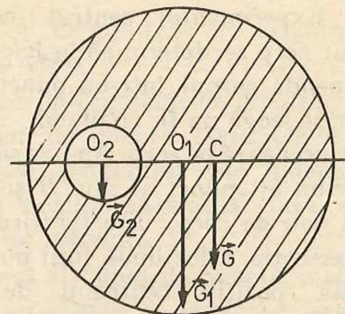


Fig. 8.26. La problema rezolvată 2.

Rezolvare. Calculăm raportul dintre greutatea $G_1 = \pi R_1^2 h\rho g$ a discului întreg și greutatea $G_2 = \pi R_2^2 h\rho g$ a părții scoase din disc:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{16}{1},$$

unde R_1 este raza discului și R_2 raza părții decupate.
Greutatea discului incomplet se obține din relația de mai sus făcînd o proporție derivată:

$$\frac{G_1 - G_2}{G_2} = \frac{15}{1}$$

deci: $G = G_1 - G_2 = 15\ G_2$.

Presupunînd că discul este întreg, greutatea lui, $\vec{G}_1$, aplicată în O_1, este rezultanta forțelor paralele $\vec{G}_2$ și $\vec{G}$.

Momentul forței rezultante $\vec{G}_1$, în raport cu O_1 este egal cu suma momentelor forțelor componente $\vec{G}_2$ și $\vec{G}$ în raport cu același punct.
Deci

$$G_2 \cdot O_1O_2 - G \cdot O_1C = 0,$$

de unde

$$O_1C = \frac{G_2 \cdot O_1O_2}{G} = \frac{G_2 \cdot O_1O_2}{15\,G_2} = \frac{10}{15} = 0{,}67 \text{ cm}.$$

8.4. ECHILIBRUL MECANIC. CONDIȚII DE ECHILIBRU

8.4.1. Echilibrul punctului material liber. Echilibrul de translație. Punctul material, fiind considerat un corp cu dimensiuni neglijabile, acesta nu poate efectua mișcări de rotație în jurul unei axe trecînd prin corp. Sub acțiunea unui sistem de forțe, punctul material poate efectua mișcări de translație. Echilibrul sistemului de forțe aplicate punctului material se numește *echilibru de translație*.

Se spune că un sistem de forțe este în echilibru sau că are efect nul atunci cînd nu influențează mișcarea sau starea de repaus a corpului pe care îl acționează.

Conform principiului fundamental al dinamicii, $\vec{R} = m\vec{a}$, cauza determinantă a variației vitezei unui corp este rezultanta $\vec{R}$, a forțelor care acționează asupra corpului. Pentru ca un sistem de forțe să nu influențeze mișcarea corpului pe care îl acționează, trebuie ca rezultanta lui să fie nulă.

Să considerăm un punct material liber, adică un punct material care nu este legat de alte corpuri și care se poate deplasa în orice direcție în spațiu.

Dacă punctul material liber este acționat de un sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, în așa fel dispuse încît rezultanta lor să fie nulă:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0, \tag{8.17}$$

atunci punctul material rămîne în repaus sau se mișcă rectiliniu și uniform față de un sistem de referință inerțial. Spunem că punctul material este în echilibru. Echilibrul este *static* cînd punctul material rămîne în repaus și echilibrul este *dinamic* cînd se mișcă rectiliniu și uniform în raport cu sistemul de referință dat. Alegînd convenabil sistemul de referință, echilibrul dinamic poate fi privit ca echilibru static. În continuare ne vom referi numai la echilibrul static. Relația (8.17) reprezintă condiția de echilibru pentru punctul material liber. Deci:

condiția necesară și suficientă pentru echilibrul unui sistem de forțe aplicate unui punct material liber este ca rezultanta forțelor să fie nulă.

Dacă proiectăm ecuația vectorială (8.17) pe două axe de coordonate perpendiculare Ox și Oy, condiția de echilibru (8.17) este înlocuită prin următoarele condiții de echilibru:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = 0, \tag{8.18}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = 0. \tag{8.19}$$

Condiția necesară și suficientă pentru echilibrul sistemului de forțe care acționează asupra punctului material liber, este ca suma componentelor forțelor pe două axe perpendiculae Ox și Oy să fie zero.

8.4.2. Echilibrul punctului material liber supus acțiunii a două forțe.

EXPERIMENT

Vom folosi dispozitivul experimental reprezentat în figura 8.27, realizat cu componente ale trusei de fizică pentru liceu. Acest dispozitiv este schematizat în mod simplificat în figura 8.28.

Corpul studiat este un inel foarte ușor, asimilat cu un punct material. Greutatea inelului se neglijează în raport cu forțele care acționează asupra lui. De inel se leagă două fire, care trec peste doi scripeți. La extremitățile acestor fire se leagă niște cîrlige suport pentru discuri crestate. Pe ambele

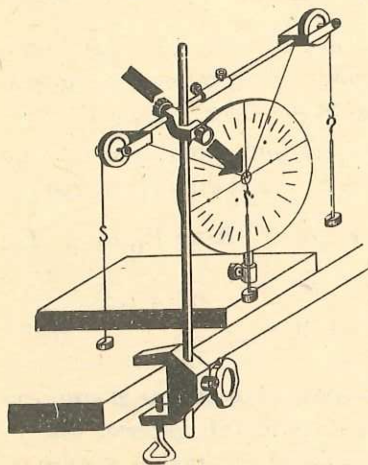


Fig. 8.27. Dispozitiv pentru studiul echilibrului forţelor.

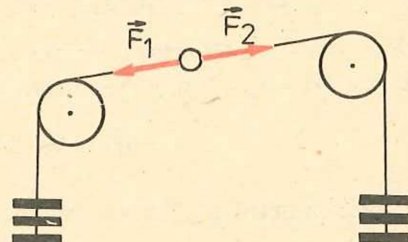


Fig. 8.28. Echilibrul unui punct material supus acţiunii a două forţe.

cîrlige suport se pun în număr egal discuri. Se constată că firele legate de inel se întind în linie dreaptă, iar inelul rămîne în repaus.

Interpretăm acest experiment simplu astfel. Asupra inelului acţionează două forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ care au acelaşi suport, sensurile opuse şi modulele egale. Rezultanta $\vec{R}$ a forţelor este egală cu zero:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Cele două forţe se echilibrează.

Un punct material liber supus acţiunii a două forţe este în echilibru dacă cele două forţe au acelaşi suport, acelaşi modul şi sensurile opuse.

8.4.3. **Echilibrul punctului material liber supus acţiunii a trei forţe.**

EXPERIMENT

Se foloseşte dispozitivul din figura 8.27 care este reprezentat simplificat în figura 8.29. Corpul studiat este inelul din experimentul precedent. De acest inel se leagă trei fire, dintre care două se trec peste cei doi scripeţi ai dispozitivului. De unul dintre firele trecute peste scripeţi se suspendă, spre exemplu, patru discuri crestate, iar de celălalt trei discuri crestate. Lăsat liber inelul nu mai rămîne în echilibru şi, pentru a-l echilibra, se suspendă de al treilea fir un număr de discuri crestate, spre exemplu cinci.

Asupra punctului material acţionează trei forţe concurente: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$. Vom înlocui forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ prin rezultanta lor $\vec{R}_1$. Punctul material se află în echilibru sub acţiunea forţelor $\vec{F}_3$ şi $\vec{R}_1$. Deci $\vec{R}_1$ trebuie să aibă acelaşi suport şi acelaşi modul ca $\vec{F}_3$ şi sensul opus acesteia:

$$\vec{R}_1 = -\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

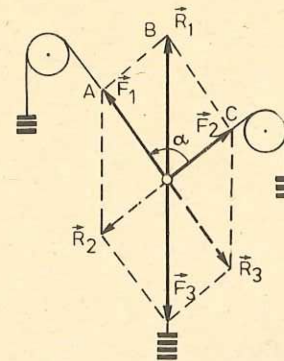


Fig. 8.29. Un punct material este în echilibru sub acţiunea a trei forţe coplanare concurente cînd rezultanta lor este nulă.

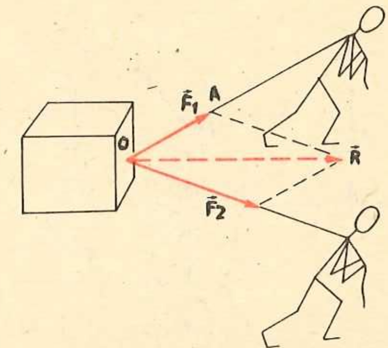


Fig. 8.30. Sistemul de forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ concurente în O este echivalent cu o forţă unică $\vec{R}$, numită rezultanta sistemului de forţe.

Deci,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.$$

Prin urmare

condiţia necesară şi suficientă ca punctul material liber supus acţiunii a trei forţe să fie în echilibru este ca rezultanta lor să fie zero.

Experimentul descris mai sus permite să se verifice faptul că: rezultanta a două forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ concurente într-un punct O este definită în direcţie, sens şi modul prin diagonala care pleacă din O, a paralelogramului care are ca laturi cele două forţe (fig. 8.29 şi 8.30).

Pentru verificarea experimentală de care am vorbit mai sus, măsurăm unghiul dintre forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ cu ajutorul unui raportor în formă de disc, cu care este prevăzut dispozitivul, şi apoi reprezentăm la scară forţele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{R}_1$ pe o foaie de hîrtie milimetrică. Din reprezentarea grafică constatăm că forţa $\vec{R}_1$ este orientată după diagonala paralelogramului construit pe forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ ca laturi şi are modulul egal cu lungimea diagonalei.

Acelaşi experiment permite să se verifice că fiecare dintre cele trei forţe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, şi $\vec{F}_3$ este direct opusă rezultantei celorlalte două (fig. 8.29).

EXEMPLU

De mijlocul unui fir O este legat un inel uşor, asimilat cu un punct material, a cărui greutate este neglijabilă în raport cu forţele care acţionează asupra lui. Capetele firului, care susţin două corpuri cu greutăţile $G_1 = 6$ N şi $G_2 = 8$ N, sînt trecute

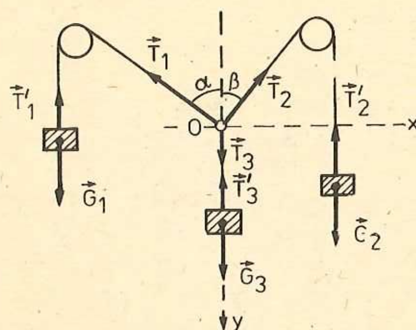


Fig. 8.31. La problema rezolvată.

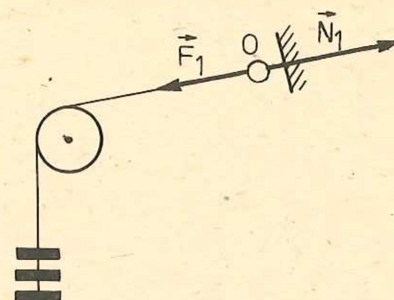


Fig. 8.32. Punctul material este în echilibru sub acțiunea forței $\vec{F}_1$ și a forței de legătură $\vec{N}_1$.

peste doi scripeți mici. De inel se leagă un al doilea fir, care susține un corp de greutate $G_3 = 10$ N (fig. 8.31). Să se determine unghiurile α și β pentru poziția de echilibru a punctului material O.

Rezolvare. Punctul material O este liber. Poziția sa în spațiu fiind determinată numai de forțele care acționează asupra lui. Asupra punctului material acționează forțele $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ și $\vec{T}_3$. Punctul material fiind în echilibru, rezultanta forțelor care acționează asupra lui este zero.

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0. \qquad (8.20)$$

Proiectăm ecuația vectorială (8.20) pe două axe de coordonate Ox și Oy. Direcția axei Oy coincide cu direcția forței $\vec{T}_3$, iar axa Ox este perpendiculară pe Oy în O. Efectuînd proiecțiile, și avînd în vedere că $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$ și $T_3 = G_3$, obținem: $-G_1 \sin\alpha + G_2 \sin\beta = 0$; $G_3 - G_1 \cos\alpha - G_2 \cos\beta = 0$, sau

$$G_1 \sin\alpha = G_2 \sin\beta;\ G_3 - G_1 \cos\alpha = G_2 \cos\beta. \qquad (8.21)$$

Ridicînd la pătrat relațiile (8.21) și apoi adunîndu-le, obținem:

$$\cos\alpha = \frac{G_3^2 + G_1^2 - G_2^2}{2G_1G_3} = 0{,}6;\ \alpha \approx 53^\circ.$$

În mod asemănător se obține și

$$\cos\beta = \frac{G_3^2 + G_2^2 - G_1^2}{2G_2G_3} = 0{,}8;\ \beta \approx 37^\circ.$$

8.4.4. **Echilibrul punctului material supus la legături.** Suprimăm unul dintre firele legate de inelul folosit în experimentul descris în § 8.4.2. și apoi prindem inelul de un cîrlig (fig. 8.32). Asupra inelului, care este în echilibru acționează forța $\vec{F}_1$. Însă această forță singură nu poate să echilibreze inelul. Trebuie să admitem existența unei a doua forțe $\vec{N}_1$. Această forță care se exercită din partea cîrligului, adică din partea legăturii, este o forță de legătură sau o forță de reacțiune sau simplu reacțiune. Forța de legătură $\vec{N}_1$ are același suport, același modul ca forța $\vec{F}_1$ și sensul opus acesteia. Deci cele două forțe se echilibrează, rezultanta lor fiind egală cu zero.

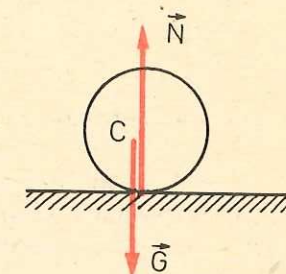


Fig. 8.33. Greutatea $\vec{G}$ a punctului material este echilibrată de reacțiunea $\vec{N}$ a suprafeței pe care este așezat acesta.

Se numește legătură, orice cauză care limitează mișcarea unui punct material sau a unui corp oarecare în spațiu. Legăturile obligă punctul material să rămînă tot timpul pe o anumită suprafață sau pe o anumită curbă sau să nu părăsească un anumit loc din spațiu.

Cîteva legături simple ale punctului material le cunoașteți din capitolele precedente. Spre exemplu: legăturile realizate prin fire care dau naștere unor reacțiuni numite tensiuni în fire, sau legăturile realizate prin anumite suprafețe plane sau curbe pe care sînt așezate puncte materiale. Acestea dau naștere unor reacțiuni $\vec{N}$ orientate de-a lungul normalei comune la suprafețele corpurilor în contact (fig. 8.33).

Reacțiunile (forțele de legătură) pot înlocui legăturile geometrice. Urmează ca atunci cînd eliberăm un punct material de o legătură, să aplicăm asupra acestuia, cîte o forță de legătură. Procedînd astfel, înlocuim legăturile cu un sistem de forțe de legătură.

Condiția necesară și suficientă ca un punct material supus la legături să fie în echilibru este ca rezultanta forțelor efectiv aplicate asupra punctului material și a forțelor de legătură să fie egală cu zero.

EXEMPLE

Pe un plan orizontal se află un punct material de greutate $\vec{G}$, asupra căruia acționează o forță $\vec{F}$, formînd cu orizontala unghiul α (fig. 8.34). Să se determine forța maximă pentru care punctul material rămîne încă în echilibru. Coeficientul de frecare dintre punctul material și plan este μ.

Rezolvare. Această problemă se referă la punctul material supus la legături. Se înlocuiesc legăturile geometrice prin forțele de legătură și se scrie condiția de echilibru:

$$\vec{G} + \vec{F}_f + \vec{F} + \vec{N} = 0, \qquad (8.22)$$

unde $\vec{G}$ este greutatea punctului material, $\vec{F}_f$ forța de frecare, $\vec{F}$ forța de tracțiune, $\vec{N}$ reacțiunea normală a planului.

Proiectînd ecuația (8.22) pe două axe de coordonate perpendiculare Ox și Oy, care au direcțiile orizontală și verticală și sensul indicat pe figură, obținem:

$$F\cos\alpha - \mu N = 0, \qquad (8.23)$$

$$N + F\sin\alpha - G = 0, \qquad (8.24)$$

unde μN este modulul forței de frecare la limita lunecării. Din relația (8.24) scoatem valoarea lui N, o introducem în (8.23) și după efectuarea calculelor obținem:

$$F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha - \mu G = 0.$$

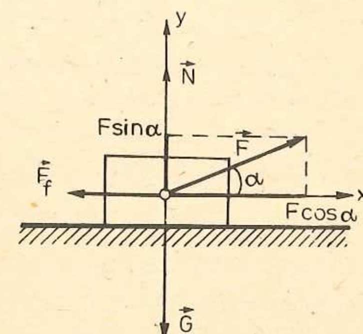


Fig. 8.34. La problema rezolvată.

Din relaţia de mai sus obţinem forţa maximă pentru care punctul material rămîne încă în echilibru:

$$F_{max} = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Pentru forţe mai mici decît F_{max} corpul va fi în echilibru.

8.4.5. **Echilibrul de translaţie şi de rotaţie al unui solid rigid.** Un solid rigid, sub acţiunea unui sistem de forţe, poate efectua o mişcare de translaţie sau o mişcare de rotaţie. Deci, în acest caz sînt necesare două condiţii de echilibru pe care le vom studia în cele ce urmează.

a. Un corp solid este în echilibru de translaţie, în raport cu un sistem de referinţă inerţial, dacă este în repaus (echilibru static) sau cînd se află în mişcare rectilinie şi uniformă (echilibru dinamic). Putem transforma orice caz de echilibru dinamic în echilibru static, plasînd solidul într-un sistem de referinţă convenabil ales.

Condiţiile de echilibru de translaţie pentru solidul rigid sînt aceleaşi ca şi pentru punctul material.

Solidul rigid este în echilibru de translaţie cînd rezultanta sistemului de forţe care acţionează asupra lui este zero.

Condiţie exprimată prin relaţia următoare:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0. \quad (8.25)$$

Relaţia (8.25) exprimă prima condiţie de echilibru.

Proiectînd ecuaţia vectorială (8.25) pe două axe perpendiculare Ox şi Oy, obţinem:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = 0, \quad (8.26)$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = 0. \quad (8.27)$$

Deci, *pentru ca un sistem de forţe aplicate unui solid rigid să fie în echilibru de translaţie (într-un plan), este necesar şi suficient ca suma componentelor forţelor pe două axe perpendiculare Ox şi Oy să fie nule.*

b. Efectul de rotaţie produs de o forţă asupra unui solid este măsurat prin momentul forţei în raport cu un punct sau cu o axă.

Solidul rigid este în echilibru de rotaţie cînd se află în repaus sau cînd se roteşte uniform în jurul unei axe. Pentru a fi îndeplinite aceste condiţii este necesar şi suficient ca momentul rezultant al forţelor aplicate solidului să fie nul.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n = 0. \quad (8.28)$$

Relaţia (8.28) exprimă a doua condiţie de echilibru, numită şi condiţia de echilibru de rotaţie.

Observaţii. 1. Echilibrul de translaţie este independent de poziţia punctelor de aplicaţie ale forţelor care îl acţionează. Dacă solidul reprezentat în

figura 8.35, *a*, este în echilibru sub acţiunea forţelor cu punctele de aplicaţie în A, B, C, el va rămîne mai departe în echilibru şi cînd punctele de aplicaţie ale forţelor sînt în A_1, B_1, C_1 (fig. 8.35, *b*). Poziţia punctului de aplicaţie al forţelor influenţează numai echilibrul de rotaţie.

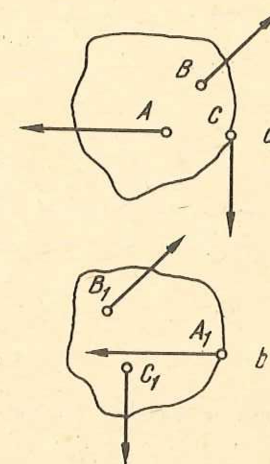


Fig. 8.35. Echilibrul de translaţie este independent de poziţia punctelor de aplicaţie ale forţelor.

2. Condiţiile de echilibru depind de natura sistemului de forţe care acţionează asupra solidului rigid. Distingem următoarele cazuri particulare:

1) Dacă solidul rigid este supus acţiunii a două forţe, el este în echilibru cînd cele două forţe au acelaşi modul, acelaşi suport şi sensurile opuse.

2) Dacă solidul este supus acţiunii a trei forţe, aplicate în trei puncte necoliniare, el este în echilibru cînd:

a) suporturile forţelor sînt cuprinse în planul determinat de punctele lor de aplicaţie;

b) suporturile forţelor sînt concurente;

c) rezultanta a două dintre cele trei forţe are acelaşi suport şi acelaşi modul ca forţa a treia, sensul ei fiind opus sensului celei de a treia forţe.

3) Dacă solidul este supus acţiunii unui sistem de forţe situate în acelaşi plan, el este în echilibru cînd rezultanta sistemului de forţe este egală cu zero:

$$\vec{R} = \sum_i^n \vec{F}_i = 0.$$

Observaţie. Dacă rezultanta forţelor este zero (adică este îndeplinită condiţia de echilibru la translaţie) atunci momentul rezultant al forţelor în raport cu orice punct din spaţiu nu depinde de acest punct (adică condiţia de anulare a momentului se poate pune faţă de orice pol).

EXEMPLE

1. Echilibrul unui solid sub acţiunea unui sistem de forţe paralele.

O bară AB, de greutate neglijabilă şi de lungime l, este aşezată pe un suport într-un punct O aflat la distanţa $b_1 = \frac{2}{3} l$ de punctul A (fig. 8.36, *a*). În ce raport trebuie să se afle forţele, care trebuie aplicate la extremităţile barei, pentru ca aceasta să fie în echilibru?

Rezolvare. Aplicăm condiţia de echilibru (8.28) sistemului de forţe care acţionează asupra barei (fig. 8.36, *b*):

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_3) = 0. \quad (8.29)$$

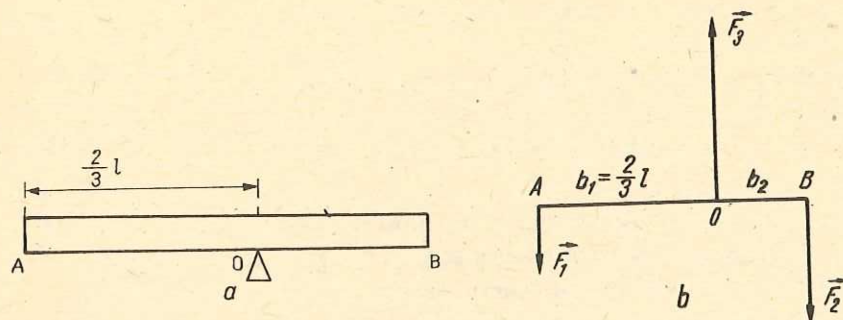


Fig. 8.36. La exemplul 1.

Momentele forţelor le calculăm în raport cu punctul O:

$$M_0(\vec{F_1}) = -b_1F_1 = -\frac{2}{3}l\,F_1;\ M_0(\vec{F_2}) = b_2F_2 = \frac{1}{3}lF_2.$$

Momentul forţei $\vec{F_3}$ în raport cu O este zero.
Înlocuind valorile momentelor în relaţia (8.29), obţinem:

$$b_2F_2 - b_1F_1 = 0,\ \text{sau}\ \frac{1}{3}lF_2 - \frac{2}{3}lF_1 = 0,$$

de unde:

$$F_2 = 2F_1. \qquad (8.30)$$

Bara este în echilibru pentru toate forţele care satisfac relaţia (8.30).
Cum bara este şi în echilibru de translaţie, rezultanta forţelor care acţionează asupra barei este zero, deci:

$$F_3 - F_2 - F_1 = 0,\ \text{sau}\ F_3 = F_1 + F_2. \qquad (8.31)$$

Cînd solidul este în echilibru de translaţie, condiţia $\Sigma\vec{M}(\vec{F_i}) = 0$ rămîne valabilă, oricare ar fi punctul sau axa în raport cu care se calculează momentele. Putem verifica acest lucru în cazul exemplului dat mai sus. Calculăm momentele în raport cu punctul A:

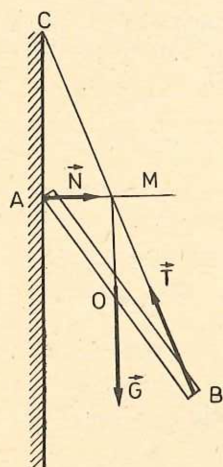


Fig. 8.37. La exemplul 2.

$$F_1 \cdot 0 - F_3 \cdot \frac{2}{3}l + F_2 \cdot l = 0.$$

Avînd în vedere relaţia (8.31), obţinem:

$$F_2 = 2F_1.$$

Calculaţi momentele forţelor în raport cu un punct C aflat la distanţa $\frac{1}{4}l$ de A.

2. Echilibrul unui solid sub acţiunea unui sistem de forţe neparalele.

O bară omogenă de masă m şi lungime l se reazemă cu capătul ei superior A de un perete neted. De capătul barei B este prins un fir inextensibil BC, fixat de perete în punctul C. Lungimea firului este $l\sqrt{3}$. Să se determine poziţia de echilibru a barei pentru care reacţiunea $\vec{N}$ este perpendiculară pe perete în A (fig. 8.37).

Rezolvare. Înlocuim legăturile la care este supusă bara prin forţele de legătură $\vec{N}$ şi $\vec{T}$. Asupra barei acţionează sistemul de forţe $\vec{N}$, $\vec{T}$ şi $\vec{G}$. Bara fiind în echilibru, suporturile celor trei forţe se intersectează într-un punct M (fig. 8.37).

Reacţiunea $\vec{N}$ este perpendiculară în A, numai pentru una dintre poziţiile de echilibru ale barei, caracterizată prin distanţa $d = AC$, pe care trebuie să o determinăm. În triunghiul CAB, dreapta OM este paralelă cu latura AC şi intersectează laturile AB şi CB la jumătate. Deci $MC = (\sqrt{3}/2)l$.
Din triunghiurile dreptunghice CAM şi AMO, obţinem:

$$AM^2 = CM^2 - AC^2 = \frac{3}{4}l^2 - d^2,$$

şi

$$AM^2 = AO^2 - OM^2 = \frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4}.$$

Din relaţiile de mai sus obţinem:

$$\frac{3}{4}l^2 - d^2 = \frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4},$$

sau

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}}\,l.$$

Poziţia de echilibru a sistemului dat este independentă de greutatea barei.

8.5. ECHILIBRUL ÎN CÎMP GRAVITAŢIONAL. ECHILIBRUL ŞI ENERGIA POTENŢIALĂ

8.5.1. **Echilibrul punctului material.** Vom studia echilibrul unui punct material în cîmpul gravitaţional uniform, unde acesta este supus acţiunii forţelor de greutate şi acţiunii forţelor de legătură.

Spunem că un punct material este în echilibru static dacă este imobil în raport cu un sistem de referinţă inerţial. Condiţia necesară ca punctul material să fie în echilibru, în raport cu un sistem de referinţă inerţial, este ca suma vectorială a tuturor forţelor care acţionează asupra lui să fie nulă. Aceasta este condiţia necesară ca punctul material să fie în echilibru, dar este ea şi suficientă pentru ca echilibrul să fie stabil?

Să considerăm o suprafaţă al cărei profil este reprezentat în figura 8.38. Vom aşeza în diferite puncte ale acestei suprafeţe o bilă de dimensiuni reduse, asimilabilă cu un punct material. Constatăm că bila este în echilibru în punctele A şi B de pe porţiunea curbă a suprafeţei, precum şi în toate punctele de pe porţiunea plană orizontală MP a suprafeţei, deoarece în toate aceste puncte rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului material este egală cu zero:

$$\vec{R} = \vec{G} + \vec{N} = 0,$$

unde $\vec{G}$ este greutatea punctului material şi $\vec{N}$ reacţiunea suprafeţei de sprijin.

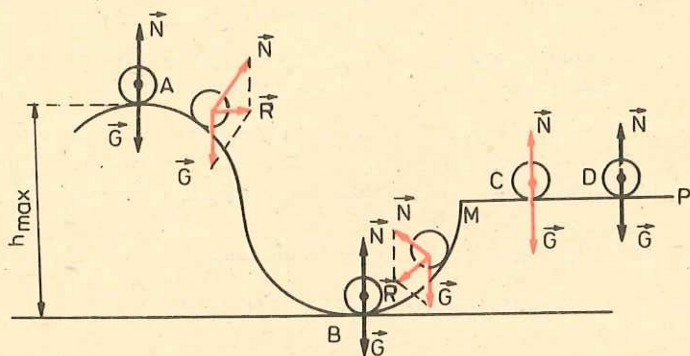


Fig. 8.38. Poziţia de echilibru stabil a unui punct material sub acţiunea forţelor de greutate corespunde minimului de energie potenţială.

Dacă îndepărtăm foarte puţin bila din poziţia de echilibru static, pot interveni trei situaţii:

a) îndepărtînd-o din punctul A, asupra bilei acţionează o forţă rezultantă care o îndepărtează şi mai mult de poziţia iniţială. Se spune că echilibrul este *instabil*;

b) îndepărtînd-o din punctul B, bila este acţionată de o forţă rezultantă care o readuce la poziţia iniţială — se spune că echilibrul este *stabil*;

c) îndepărtată din punctul C, bila rămîne în echilibru în orice punct al suprafeţei plane orizontale — se spune că echilibrul este *indiferent*.

Prin urmare, forţa rezultantă egală cu zero este o condiţie necesară, dar nu suficientă pentru echilibrul stabil al punctului material într-un cîmp de forţe conservativ.

Echilibrul punctului material (al bilei) poate fi considerat şi din punctul de vedere al energiei potenţiale a sistemului alcătuit din punctul material şi Pămînt. Energia potenţială a acestui sistem se exprimă prin relaţia $E_p = mgh$, unde h reprezintă diferenţa de nivel dintre poziţia punctului material şi nivelul corespunzător energiei potenţiale nule. În cazul descris mai sus şi reprezentat în figura 8.38, vom lua planul orizontal care trece prin punctul B, ca nivel de referinţă pentru energia potenţială, a cărei valoare la acest nivel o considerăm nulă, $E_{pB} = E_{po} = 0$. Punctul A corespunde maximului de energie potenţială, iar punctul B corespunde minimului de energie potenţială. Pe planul orizontal care trece prin punctele C şi D energia potenţială este constantă.

Deci, poziţia de echilibru stabil a unui punct material sub acţiunea forţelor de greutate este aceea care corespunde minimului de energie potenţială, în comparaţie cu valorile din poziţiile vecine. Această proprietate este valabilă pentru orice punct material supus acţiunii unor forţe conservative.

În poziţia de echilibru instabil, energia potenţială are o valoare maximă în comparaţie cu valorile din punctele vecine. Iar în cazul cînd energia potenţială a punctului material este constantă, punctul material se află în echilibru indiferent.

8.5.2. **Echilibrul solidului rigid suspendat.** Consideraţiile făcute asupra echilibrului punctului material în cîmpul gravitaţional se pot extinde foarte uşor la echilibrul solidului rigid. Părţile componente ale solidului sînt acţionate de forţele gravitaţionale a căror rezultantă este aplicată în centrul de greutate al corpului. Putem să înlocuim solidul printr-un punct material plasat în centrul său de greutate în care presupunem concentrată întreaga masă a corpului.

Cunoaşterea poziţiei centrului de greutate al unui solid este de mare importanţă pentru diferitele aspecte ale echilibrului acestuia.

Suspendăm o riglă omogenă cu una dintre extremităţile sale de un cui (fig. 8.39, *a*). Constatăm că centrul său de greutate se află sub punctul de suspensie şi pe aceeaşi verticală cu acesta. Forţele care acţionează asupra riglei, greutatea $\vec{G}$ şi reacţiunea $\vec{N}$ a suportului se echilibrează. Se îndepărtează rigla din această poziţie. Centrul său de greutate urcă, iar energia potenţială creşte. Lăsată liber, rigla este readusă în poziţia iniţială de către cuplul alcătuit din forţele $\vec{G}$ şi $\vec{N}$. În acest caz, rigla se află în echilibru stabil. Poziţiei de echilibru stabil îi corespunde energia potenţială minimă.

Se roteşte rigla cu 180°, aşa cum indică figura 8.39, *b*. Centrul de greutate a urcat deasupra punctului de sprijin, iar energia potenţială a sistemului a crescut la valoarea maximă. În acest caz avem de a face cu un echilibru instabil. Îndepărtînd foarte puţin rigla din această poziţie, aceasta, sub acţiunea cuplului de forţe $\vec{G}$ şi $\vec{N}$, tinde să ocupe poziţia corespunzătoare energiei potenţiale minime; deci, poziţia de echilibru stabil.

Dacă se suspendă rigla în centrul său de greutate, oricare ar fi poziţia în care o aşezăm, ea rămîne în echilibru. În acest caz rigla este în echilibru indiferent.

În concluzie, modificînd foarte puţin poziţia de echilibru static a unui solid suspendat, se pot ivi trei cazuri:

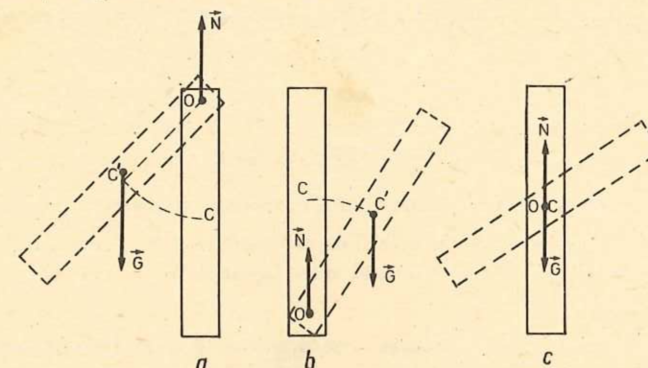


Fig. 8.39. Solidul (rigla) este în echilibru: stabil în poziţia *a*; instabil în poziţia *b*; indiferent în poziţia *c*

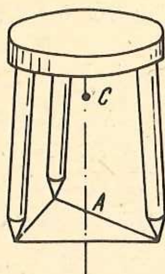


Fig. 8.40. Baza de sprijin a trepiedului este un triunghi.

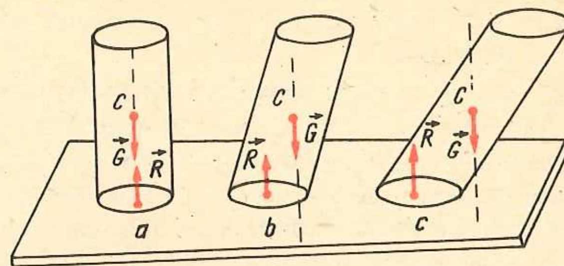


Fig. 8.41. Un corp aşezat pe o suprafaţă plană este în echilibru cînd verticala coborîtă din centrul său de greutate cade în interiorul suprafeţei de susţinere.

a) solidul revine la poziţia iniţială — se spune că echilibrul este stabil;

b) solidul se îndepărtează şi mai mult de poziţia de echilibru — se spune că echilibrul este instabil;

c) solidul rămîne în repaus în orice poziţie — se spune că echilibrul este indiferent.

8.5.3. **Echilibrul solidului care are o bază de sprijin.** Clădirile, vehiculele, obiectele din gospodării aşezate pe suprafeţe plane sînt în stare de echilibru, deoarece ele au o bază de susţinere. Un scaun sau o masă se sprijină pe podea în patru puncte, un taburet în trei puncte. Unind punctele corpului aflate în contact cu suprafaţa plană şi anume pe cele mai îndepărtate, obţinem un poligon convex, a cărui suprafaţă se numeşte *bază de susţinere.* Figura 8.40 arată că baza de susţinere a unui taburet este un triunghi.

Un corp solid aşezat pe o suprafaţă plană se află în echilibru, atunci cînd verticala coborîtă din centrul său de greutate cade în interiorul bazei de susţinere. De exemplu cilindrul din figura 8.41, *a* este în echilibru deoarece greutatea şi reacţiunea se echilibrează reciproc. Cilindrul din figura 8.41, *c*, pentru care verticala coborîtă din centrul de greutate nu cade în interiorul bazei de sprijin, nu este în echilibru, deoarece greutatea şi reacţiunea formează un cuplu care tinde să-l răstoarne. Cilindrul din figura 8.41, *b* este la limita echilibrului.

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. În ce caz, două sau mai multe sisteme de forţe, sînt echivalente?

2. Se descompune o forţă pe două direcţii oarecare coplanare cu forţa. Este posibil ca una dintre componentele forţei să fie mai mare decît forţa?

R: da.

3. Dacă rezultanta unui sistem de forţe concurente este zero, demonstraţi că şi momentul rezultant al acestor forţe în raport cu un punct oarecare este zero.

4. Demonstraţi că un cuplu nu poate fi echilibrat decît de un alt cuplu.

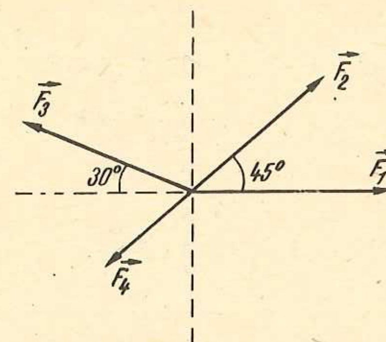


Fig. 8.42. La problema 8.

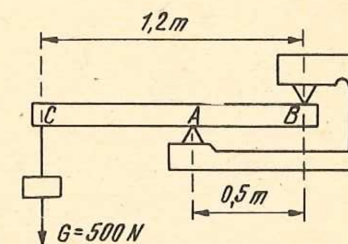


Fig. 8.43. La problema 9.

5. Să se determine rezultanta a trei forţe coplanare şi concurente care au mărimile $F_1 = F_2 = F_3 = 40$ N şi care fac între ele unghiuri de 120°.

R: $R = 0$.

6. De cablul unui funicular atîrnă un corp cu masa $m = 100$ kg. Cablul face între cele două părţi întinse unghiul $\alpha = 120°$. Ce forţă de întindere acţionează în cablu?

R: $T = 980$ N.

7. Se dau 6 forţe concurente egale în modul care fac între ele unghiuri de 60°. Să se afle rezultanta sistemului de forţe.

R: $R = 0$.

8. Să se calculeze prin metoda analitică, rezultanta sistemului de forţe reprezentat în figura 8.42. Se dau $F_1 = F_2 = F_3 = 40$ N, $F_4 = 20$ N.

R: $R \approx 39$ N.

9. O bară cu greutatea neglijabilă se sprijină în A şi B pe două suporturi (fig. 8.43). La extremitatea C a barei se suspendă o sarcină $G = 500$ N. Să se calculeze reacţiunile suporturilor asupra barei, în punctele de sprijin.

R: $N_A = 1\,200$ N; $N_B = 700$ N.

10. O grindă de greutate neglijabilă se sprijină în M şi N pe două suporturi (fig. 8.44). De grindă sînt suspendate trei sarcini $F_1 = 200$ N; $F_2 = 300$ N; $F_3 = 150$ N, în punctele A, B şi C. Să se determine:

a) modulul şi poziţia punctului de aplicaţie al rezultantei $\vec{R}_1$ a forţelor $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$;

b) modulul şi poziţia punctului de aplicaţie al rezultantei $\vec{R}_2$ a forţelor $\vec{R}_1$ şi $\vec{F}_3$.

R: *a)* $R_1 = 500$ N; la 18 cm de A; *b)* $R_2 = 650$ N; la 63 cm de C

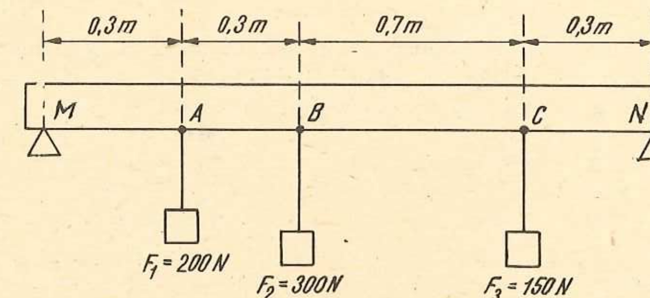


Fig. 8.44. La problema 10.

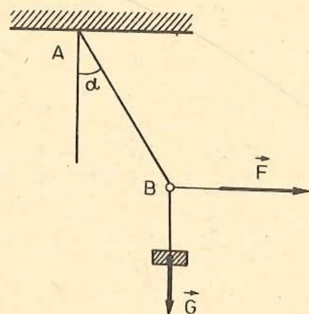
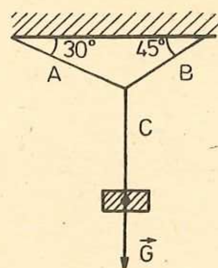


Fig. 8.45. La problema 12.



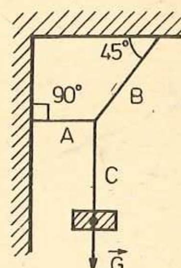


Fig. 8.46. La problema 13.

11. O șină de cale ferată cu lungimea $l = 10$ m și cu masa $m = 900$ kg este ridicată cu două frînghii paralele. Să se determine tensiunile din frînghii, dacă una dintre ele este fixată la un capăt al șinei iar cealaltă la distanța $d = 1$ m de celălalt capăt.

R: 4 000 N; 5 000 N.

12. De un fir fixat într-un punct A, se suspendă un corp cu masa $m = 2$ kg. Un al doilea fir este legat de primul în B (fig. 8.45). Asupra firului al doilea se exercită o forță orizontală $\vec{F}$. Care trebuie să fie mărimea forței $\vec{F}$, pentru ca unghiul α dintre AB și verticală să fie egal cu 45° ($g = 10$ m/s²)?

R: $F = G \operatorname{tg} \alpha = 20$ N.

13. Să se calculeze tensiunile din firele A, B și C din montajele reprezentate în figurile 8.46, *a* și *b*. Se dă $G = 80$ N.

R: *a)* $T_1 \approx 59$ N; $T_2 \approx 72$ N; $T_3 = 80$ N; *b)* $T_1 = 80$ N; $T_2 \approx 113$ N; $T_3 = 80$ N.

14. Trei forțe paralele cu intensitățile $F_1 = 1$ N; $F_2 = 4$ N; $F_3 = 7$ N sînt aplicate în trei puncte A, B și C, așezate în linie dreaptă, astfel ca $AB = BC = 10$ cm. A treia forță este de sens contrar celorlalte două. Să se determine intensitatea și punctul de aplicație D, al rezultantei celor trei forțe.

R: $R = 2$ N; $AD = 50$ cm; $CD = 30$ cm.

15. Un solid este acționat de două forțe concurente $F_1 = 5$ N și $F_2 = 10$ N care fac între ele un unghi de 120°. Să se determine forța F_3, concurentă cu primele două, ce trebuie aplicată solidului, pentru ca acesta să fie în echilibru.

R: $F_3 = 8{,}66$ N, perpendiculară pe F_1.

16. Un corp A, cu masa $m = 500$ g, este așezat pe un plan înclinat (fig. 8.47). Ce masă trebuie să aibă corpul B, suspendat la extremitatea firului care trece peste scripetele S, pentru a menține corpul A în echilibru? Se neglijează frecările.

R: $m_B = 250$ g.

17. O forță $F = 100$ N, orizontală, menține în echilibru static un corp așezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ față de orizontală (fig. 8.48). Frecările sînt neglijabile. Să se calculeze greutatea corpului și reacțiunea planului înclinat.

R: $G = 100$ N; $N = 100\sqrt{2}$ N.

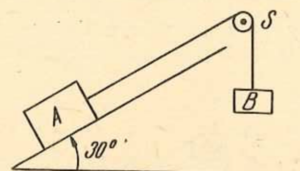


Fig. 8.47. La problema 16.

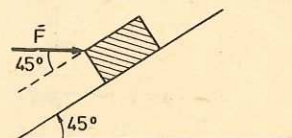


Fig. 8.48. La problema 17.

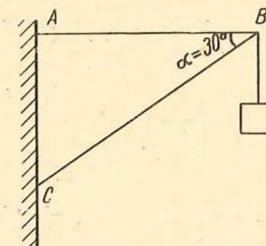


Fig. 8.49. La problema 18.

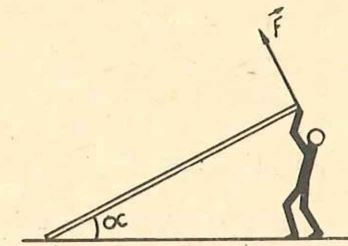


Fig. 8.50. La problemele 19 și 20.

18. Să se calculeze momentul greutății corpului suspendat în B (fig. 8.49), în raport cu punctele A, B și C, dacă $CB = 1$ m, $\alpha = 30°$ și masa corpului $m = 4$ kg.

R: $20\sqrt{3}$ N.m; 0 N.m; $20\sqrt{3}$ N.m.

19. În figura 8.50 este reprezentat un muncitor care ține o scîndură. În ce caz muncitorul acționează cu o forță maximă, cînd forța este perpendiculară pe scîndură sau cînd forța este îndreptată vertical în sus?

20. Un muncitor ține o scîndură de un capăt, astfel încît scîndura să facă un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala (fig. 8.50). Masa scîndurii este $m = 40$ kg. Să se calculeze mărimea forței cu care muncitorul susține scîndura, dacă direcția forței este perpendiculară pe scîndură.

R: $F = (mg \cos \alpha)/2 = 173$ N.

21. Un corp de formă cubică cu latura $l = 0{,}4$ m și cu masa $m = 40$ kg se află pe o suprafață orizontală. În fața corpului se află un mic prag B. La ce înălțime h trebuie aplicată o forță $F = 400$ N pentru ca reacțiunea normală în punctul A să fie nulă (fig. 8.51)? (*Indicație:* reacțiunea normală în A este nulă cînd corpul începe să se ridice în A deci cînd momentele forțelor $\vec{G}$ și $\vec{F}$ în raport cu punctul B vor fi egale.)

R: $h = Gl/(2F) = 0{,}2$ m.

22. O bară cu masa $m_0 = 10$ kg este montată așa cum se arată în figura 8.52, astfel încît să poată susține un corp cu masa $m = 100$ kg. Să se calculeze tensiunea în cablul AB.

R: $T = \dfrac{(2m + m_0)g \cos 45°}{2 \sin 15°} = 2\,849{,}6$ N.

23. O bară omogenă, de grosime constantă, are lungimea $l = 50$ cm și greutatea $G_1 = 40$ N. La una dintre extremitățile barei se sudează o sferă cu raza $R = 5$ cm și greutatea $G_2 = 10$ N. Să se determine poziția centrului de greutate a sistemului astfel format.

R: $d = 24$ cm, de la centrul sferei.

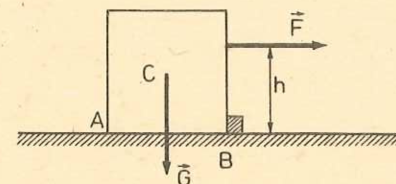


Fig. 8.51. La problema 21.

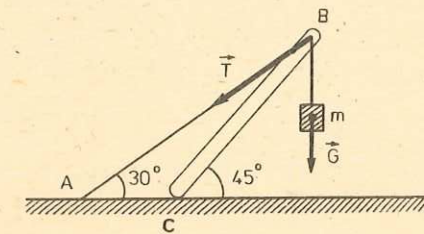


Fig. 8.52. La problema 22.



Fig. 8.53. La problema 27.

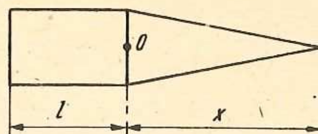


Fig. 8.54. La problema 28.

24. O placă pătrată omogenă este împărțită în patru pătrate. Se taie și se înlătură un pătrat. Să se determine poziția centrului de greutate al porțiunii rămase. Latura pătratului este $l = 1$ m.

R: $d = l\sqrt{2}/12 = 0{,}116$ m, față de centrul plăcii.

25. De la capătul unei bare cilindrice s-a tăiat o porțiune cu lungimea $l = 40$ cm. Să se calculeze distanța cu care s-a deplasat centrul de greutate al porțiunii rămase față de centrul de greutate al barei întregi.

R: $d = l/2 = 20$ cm.

26. Două bile cu razele egale sînt fixate în punctul de contact. Masa uneia dintre bile este de două ori mai mare decît a celeilalte. Să se determine poziția centrului de greutate al sistemului.

R: $d = (2/3)\ R$, față de centrul bilei cu masa mai mare.

27. O bară cilindrică cu lungimea $l = 30$ cm este făcută jumătate din oțel și jumătate din aluminiu (densitățile oțelului și aluminiului sînt $\rho_1 = 7\ 860$ kg/m³ și $\rho_2 = 2\ 700$ kg/m³). Să se determine poziția centrului de greutate al barei (fig. 8.53).

R: $x_{CG} = 11{,}34$ cm, față de extremitatea liberă a părții din oțel.

28. În figura 8.54 este reprezentată o placă metalică. Să se determine raportul dintre înălțimea x a părții triunghiulare și lungimea l a părții dreptunghiulare astfel ca centrul de greutate al plăcii să fie în punctul O.

R: $x = l\sqrt{3}$.

9

MECANICA FLUIDELOR

Mecanica fluidelor se ocupă cu echilibrul și mișcarea fluidelor și cu acțiunea lor asupra pereților ce le înconjură sau asupra corpurilor cufundate în ele.

Problema fundamentală a mecanicii fluidelor este determinarea repartiției presiunilor și a vitezelor în interiorul fluidelor.

Mecanica fluidelor are următoarele părți:

a) statica fluidelor, care cuprinde statica lichidelor (hidrostatica, care studiază lichidele în echilibru) și statica gazelor (aerostatica, care studiază gazele în echilibru);

b) dinamica fluidelor, care cuprinde dinamica lichidelor (hidrodinamica, care studiază mișcarea lichidelor) și dinamica gazelor (aerodinamica, care studiază mișcarea gazelor).

9.1. STAREA FLUIDĂ

Corpurile, din punctul de vedere al stării de agregare, se împart în trei mari categorii: solide, lichide și gaze. Lichidele și gazele poartă denumirea de fluide.

Solidele și fluidele se disting ușor prin caracteristicile lor diferite.

Noțiunea de solid este inseparabilă de cea de formă. În solide, moleculele fiind repartizate la distanțe mici unele față de altele, forțele de atracție dintre ele sînt mari, asigurînd solidelor o formă proprie. Din contră, noțiunea de fluid exclude complet noțiunea de formă.

Un fluid este, prin definiție, o substanță care poate curge și care ia forma vasului care o conține.

Lichidele sînt practic incompresibile. Forțele de coeziune dintre moleculele lichidelor fiind mici, forma lor poate fi modificată de o forță foarte

mică. Ele își recapătă forma inițială, în momentul cînd forța încetează să acționeze.

Un lichid este totdeauna mărginit de o anumită suprafață care îl separă de corpurile solide sau gazoase. Suprafața de separare dintre lichid și gaz se numește *suprafață liberă.*

Gazele sînt perfect elastice și umplu totdeauna volumele ce le conțin. Ca și lichidele și gazele la volum constant nu opun o rezistență apreciabilă la schimbarea formei.

Corpurile gazoase nu au suprafețe libere.

Fluidele reale opun o rezistență la alunecarea unui strat peste altul sau la înaintarea unui corp în fluide și de aceea spunem că sînt vîscoase. Viscozitatea este deci rezultatul frecării dintre straturile paralele de fluid care alunecă unul peste altul.

Un fluid incompresibil și lipsit de viscozitate se numește *fluid ideal.* Fluidul ideal este un model fizic, el nu există în realitate, însă este foarte util, deoarece ușurează studiul anumitor fenomene și oferă un termen de comparație comod. Acest model de fluid ideal constituie o aproximație satisfăcătoare pentru un număr mare de lichide și chiar de gaze, atîta timp cît vitezele acestora sînt mai mici decît viteza sunetului.

9.2. NOȚIUNEA DE PRESIUNE

Presiunea este o mărime fizică egală cu raportul dintre mărimea forței $\vec{F}$, care apasă normal și uniform pe o suprafață și aria S a acestei suprafețe (fig. 9.1):

$$p = \frac{F}{S}. \quad (9.1)$$

Deoarece apăsarea forței nu poate fi uniformă pe orice suprafață, atunci relația (9.1) reprezintă presiunea medie pe o suprafață.

Unitatea de măsură pentru presiune este egală cu raportul dintre unitatea de măsură a forței și unitatea de măsură a ariei, adică N/m². Această unitate se numește Pascal și se notează cu Pa,

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

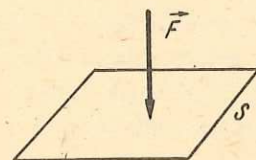


Fig. 9.1. Presiunea este raportul dintre mărimea forței ce apasă normal pe suprafață și aria suprafeței.

Pentru presiune se mai folosesc și unitățile următoare: torrul (torr), atmosfera fizică (atm), atmosfera tehnică (at).

$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm Hg} \approx 133{,}3 \text{ N/m}^2$,

$1 \text{ atm} = 760 \text{ torr} = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$,

$1 \text{ at} = 98\,066.5 \text{ N/m}^2$,

$1 \text{ torr} = 13{,}6 \text{ mm } H_2O$.

9.3. STATICA FLUIDELOR: HIDROSTATICA ȘI AEROSTATICA

Un fluid este în echilibru cînd fiecare porțiune de fluid este în repaus. Presiunea în fluidele în echilibru (în repaus) nu depinde decît de poziția punctului în care este definită.

9.3.1. **Forța exercitată de către un fluid în echilibru pe peretele vasului care îl conține.** Considerăm un vas în care se află un lichid (fig. 9.2). Datorită greutății sale, lichidul exercită o forță pe peretele vasului. Conform principiului acțiunilor reciproce și vasul exercită asupra lichidului o forță care echilibrează greutatea lichidului.

Să considerăm un element din suprafața peretelui vasului, notat cu S (fig. 9.2). Forța exercitată de lichid, pe elementul de suprafață S, este normală pe acest element. Dacă această forță, pe care o notăm cu $\vec{F}$, nu ar fi normală pe S, am putea să o descompunem într-o forță, componentă normală, $\vec{F}_n$ și o forță, componentă tangențială, $\vec{F}_t$. Sub acțiunea componentei tangențiale, lichidul s-ar deplasa în lungul peretelui vasului și nu ar putea fi în echilibru.

Existența forțelor de apăsare, exercitate de către gaze pe pereții vaselor în care sînt închise, poate fi pusă în evidență printr-un experiment simplu.

EXPERIMENT

Se introduce într-o cameră de minge de fotbal o anumită cantitate de pudră de talc foarte fină și apoi se umflă camera cu ajutorul unei pompe. Peretele elastic al camerei se întinde, sub acțiunea forțelor exercitate pe suprafața interioară a acesteia și camera ia o formă sferică. Această formă ne determină să admitem că forțele exercitate de gaz, pe peretele interior al camerei, au aceeași intensitate (fig. 9.3). Dacă se găurește camera cu un ac

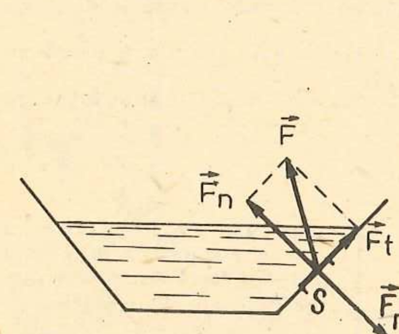


Fig. 9.2. Dacă lichidul ar exercita o forță de presiune oblică pe pereții vasului în care se află, atunci lichidul ar curge din vas.

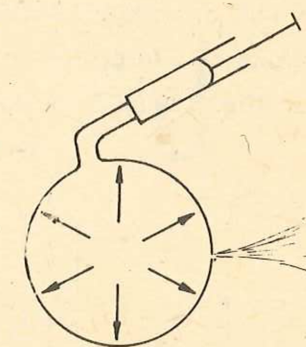


Fig. 9.3. Un gaz în echilibru — ca și un lichid în echilibru — exercită pe orice element de suprafață în contact cu el o forță de apăsare perpendiculară pe acest element de suprafață.

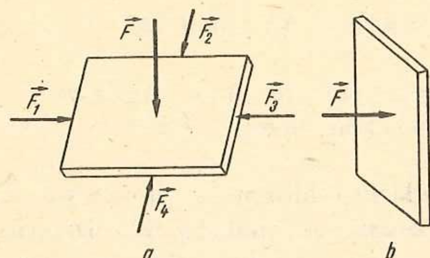


Fig. 9.4. Forța care acționează pe o suprafață din interiorul unui lichid este perpendiculară pe suprafață și nu depinde de orientarea acestei suprafețe în jurul centrului său.

foarte fin, continuînd să introducem în ea aer cu ajutorul pompei, constatăm că din cameră iese un jet de gaz perpendicular pe suprafața acesteia, făcut vizibil de către particulele de talc. Direcția de mișcare a particulelor de talc, care ies din camera de minge, dă direcția de acțiune a forțelor de presiune exercitate de gaz.

9.3.2. **Forța de apăsare exercitată de un fluid în echilibru pe suprafața unui corp cufundat în fluid.** Se introduce un solid în interiorul unui fluid (fig. 9.4). Fluidul exercită forțe de apăsare pe toate părțile suprafeței solidului care sînt în contact cu el. Pentru același motiv, arătat în paragraful precedent, aceste forțe sînt perpendiculare pe suprafețele pe care se exercită.

Existența forțelor de apăsare exercitate de lichide pe suprafețele corpurilor cufundate în lichide poate fi pusă în evidență cu ajutorul dispozitivului experimental prezentat în figura 9.5.

EXPERIMENT

Se folosește un cilindru de sticlă deschis la ambele capete și care poate fi astupat la partea inferioară cu un disc de plastic foarte ușor. De disc este legat un fir foarte subțire cu ajutorul căruia îl ținem în contact cu cilindrul, atunci cînd nu se află în lichid. Dacă se slăbește firul, cînd cilindrul este în aer, discul cade sub acțiunea propriei sale greutăți (fig. 9.5, *a*).

Se introduce cilindrul, astupat cu discul la partea inferioară, într-un vas cu apă. Se slăbește firul și se constată că discul nu cade. Asupra discului acționează o forță $\vec{F}$ orientată de jos în sus. Forța $\vec{F}$ este perpendiculară pe disc (fig. 9.5, *b*). Dacă forța $\vec{F}$ ar fi oblică, discul s-ar deplasa sub acțiunea

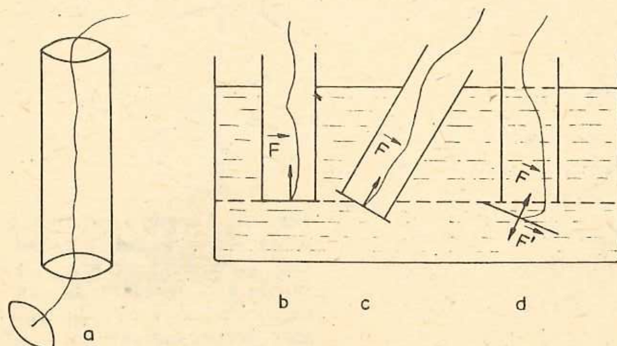


Fig. 9.5. Un lichid exercită pe orice suprafață în contact cu el o forță de apăsare perpendiculară pe această suprafață. În cazul *d* din figură, apa exercită pe cele două fețe ale discului forțele $\vec{F}$ și $\vec{F'}$ egale și opuse. În acest caz discul se desprinde de cilindru și cade sub acțiunea propriei sale greutăți.

acestei forțe și s-ar desprinde de cilindru. Se înclină cilindrul și se constată că discul nu se deplasează (fig. 9.5, *c*). Se readuce cilindrul în poziție verticală și se toarnă apă în el pînă la nivelul apei din vas. Se constată că discul se desprinde de cilindru, deci pe ambele fețe ale discului se exercită forțe egale și de sens opus (fig. 9.5, *d*).

9.3.3. **Presiunea hidrostatică.** În acest paragraf precum și în paragrafele următoare vom studia fenomenele specifice fluidelor lichide, dar concluziile se aplică și fluidelor gazoase.

Hidrostatica studiază lichidele în repaus. Statica lichidelor reale se confundă cu statica lichidelor ideale, deoarece forțele de viscozitate nu intervin în cazul lichidelor în repaus. Un lichid în echilibru se află numai sub acțiunea propriei sale greutăți. Datorită greutății lor, păturile de lichid care se află în contact exercită presiuni unele asupra altora; în cazul în care lichidul este în echilibru, presiunea exercitată la un anumit nivel se numește *presiune hidrostatică*.

Pentru a găsi factorii de care depinde presiunea într-un punct dintr-un lichid în echilibru vom folosi capsula manometrică. Se leagă capsula manometrică la un tub (*4*) în formă de *U* (fig. 9.6), prin intermediul unui furtun (*3*). Tubul (*4*) conține un lichid colorat, care are același nivel în ambele ramuri. Exercitînd o apăsare pe membrana elastică, aceasta comprimă aerul din cutie care determină o scădere a nivelului lichidului din ramura *A* a tubului în formă de *U* și o creștere a nivelului în ramura *B*. Acest aparat permite compararea presiunilor exercitate pe suprafața *S* a membranei (fig. 9.7).

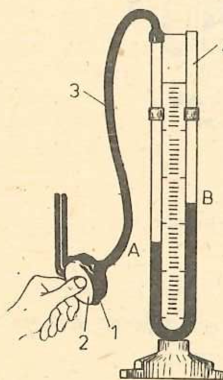


Fig. 9.6. Capsula manometrică folosită pentru punerea în evidență a forțelor exercitate pe suprafața unui solid introdus într-un lichid este alcătuită dintr-o cutie metalică *1* care are un perete elastic *2*.

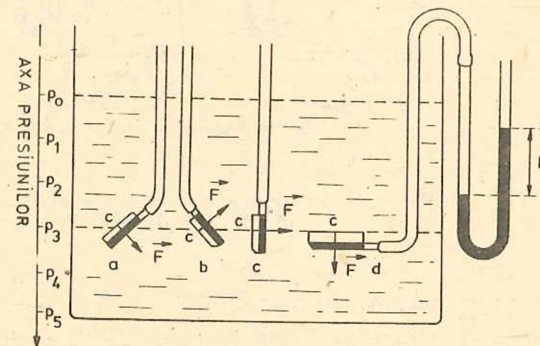


Fig. 9.7. Presiunea într-un lichid în repaus; *a)* crește cu adîncimea; *b)* are o valoare constantă în toate punctele unui plan orizontal; *c)* într-un punct din interiorul lichidului are aceeași valoare în toate direcțiile.

1. Se introduce capsula într-un vas cu apă, la o adîncime din ce în ce mai mare şi se compară presiunile la diferitele nivele (fig. 9.7).

Se constată că presiunea într-un lichid în repaus creşte cu adîncimea.

2. La o anumită adîncime în lichid se orientează membrana în diferite direcţii încît centrul său C să rămînă în acelaşi punct din interiorul lichidului. Se constată că denivelarea în tubul în U rămîne constantă (fig. 9.7).

Rezultă că, *presiunea într-un punct al lichidului este independentă de orientarea suprafeţei pe care se exercită. Într-un punct din interiorul lichidului presiunea are aceeaşi valoare în toate direcţiile.*

3. Se deplasează capsula astfel ca centrul membranei să rămînă în acelaşi plan orizontal; denivelarea h rămîne constantă.

Presiunea exercitată de un lichid în repaus este aceeaşi în toate punctele unui plan orizontal. Deci, într-un lichid în repaus, planele orizontale sînt suprafeţe de egală presiune.

4. Se introduce succesiv capsula manometrică, la o adîncime H, în alcool, apă distilată, saramură (soluţie de sare în apă) şi se constată că denivelarea h variază în funcţie de densitatea lichidului (fig. 9.8).

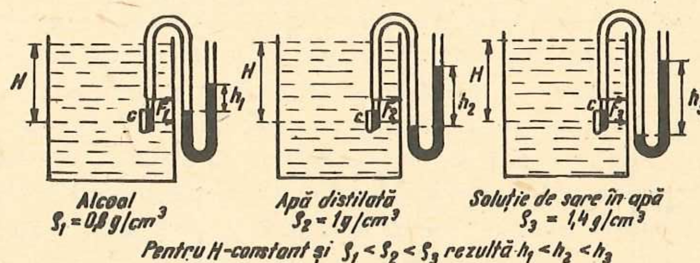


Fig. 9.8. Presiunea în puncte situate la aceeaşi adîncime în lichide diferite depinde de natura lichidului.

Presiunea în punctele aflate la aceeaşi adîncime în lichide diferite depinde de natura lichidului, fiind proporţională cu densitatea lichidului.

9.3.4. **Diferenţa de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid.** Într-un recipient se află un lichid în repaus. Limităm un volum V de lichid de formă paralelipipedică cu aria bazei S şi înălţimea h. Presupunem că lichidul cuprins în volumul V a fost delimitat printr-o peliculă foarte subţire, fără greutate şi inextensibilă, ceea ce nu modifică echilibrul volumului de lichid astfel delimitat (fig. 9.9). Lichidul cuprins în volumul V are greutatea:

$$G = \rho g S(h_2 - h_1) = \rho g S h, \tag{9.2}$$

unde ρ este densitatea lichidului, $h = h_2 - h_1$ este înălţimea paralelipipedului şi S aria bazei paralelipipedului.

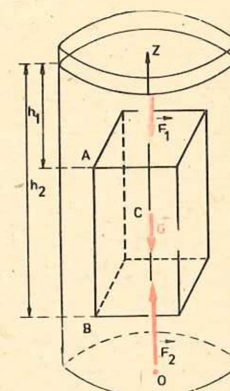


Fig. 9.9. Forţele care acţionează pe feţele laterale ale paralelipipedului de lichid sînt egale şi opuse. Diferenţa forţelor F_2 şi F_1 este egală cu greutatea paralelipipedului de lichid.

Presiunea exercitată de către lichid pe faţa inferioară B a paralelipipedului, aflată la adîncimea h_2, are valoarea p_2. Pe faţa superioară aflată la nivelul h_1 se exercită presiunea p_1. Forţele de apăsare exercitate de către lichid pe feţele paralelipipedului sînt normale pe aceste feţe. Forţele care acţionează pe feţele laterale îşi anulează reciproc efectele, ele avînd valori egale şi de sens opus. Pe faţa superioară acţionează forţa $\vec{F}_1$, de intensitate $F_1 = p_1 S$, iar pe faţa inferioară acţionează forţa $\vec{F}_2$, de intensitate $F_2 = p_2 S$. Scriind condiţia de echilibru pentru paralelipiped, obţinem:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0, \tag{9.3}$$

Proiectînd ecuaţia vectorială (9.3) pe axa Oz obţinem:

$$p_2 S - p_1 S - \rho g S h = 0,$$

de unde

$$p_2 - p_1 = \rho g h, \tag{9.4}$$

unde $p_2 - p_1$ este diferenţa de presiune între nivelele h_2 şi h_1 iar $h = h_2 - h_1$.

Putem enunţa principiul fundamental al hidrostaticii:

Diferenţa de presiune între două puncte dintr-un lichid în echilibru este numeric egală cu greutatea unei coloane din acel lichid avînd ca bază unitatea de suprafaţă şi ca înălţime distanţa dintre planele care conţin punctele respective.

Dacă la nivelul *2* presiunea este p, iar nivelul *1* coincide cu suprafaţa liberă a lichidului, atunci:

$$p - H = \rho g h \quad \text{sau} \quad p = H + \rho g h, \tag{9.5}$$

H fiind presiunea atmosferică.

Se constată că *presiunea hidrostatică este independentă de forma vasului în care se află lichidul şi că este aceeaşi în toate punctele aflate la aceeaşi adîncime în lichid.* Din relaţia (9.5) rezultă că dacă se măreşte presiunea pe suprafaţa liberă a lichidului, presiunea p din interiorul lichidului creşte cu aceeaşi cantitate.

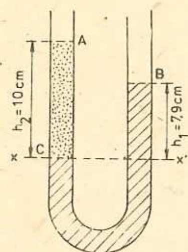


Fig. **9.10.** Pentru problema rezolvată.

EXEMPLU

Într-un tub în formă de *U* (fig. 9.10) se toarnă apă cu densitatea $\rho_1 = 1{,}00\ g/cm^3$ și apoi în una dintre ramuri se toarnă un lichid care nu se amestecă cu apa, de densitate ρ_2 necunoscută. Înălțimile coloanelor de lichid, în cele două ramuri, deasupra suprafeței de separare a lichidelor, sînt indicate pe figura 9.10. Să se calculeze densitatea ρ_2.

Rezolvare. Suprafețele de separare apă-aer, apă-lichid, lichid-aer sînt plane orizontale. În *A* și *B* presiunile p_A și p_B sînt egale cu presiunea atmosferică $H(p_A = p_B = H)$.

Pe suprafața de separare xx' apă-lichid, presiunile în apă și în lichid sînt egale ($p_1 = p_2$). La acest nivel presiunile sînt:

$$p_1 = H + \rho_1 g h_1, \text{ presiunea în apă, și}$$
$$p_2 = H + \rho_2 g h_2, \text{ presiunea în lichid.}$$

Deoarece $p_1 = p_2$, rezultă:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \text{ și } \rho_2 = \frac{\rho_1 h_1}{h_2} = 0{,}79\ g/cm^3.$$

9.3.5. **Măsurarea presiunii atmosferice.** Aerul este cel mai răspîndit gaz. El înconjură toată suprafața Pămîntului într-o pătură foarte groasă numită atmosferă terestră.

Aerul este peste tot în jurul nostru, însă noi nu-l vedem el fiind incolor, fără gust și fără miros.

Atmosfera este alcătuită dintr-un amestec de gaze cu vapori de apă, cristale de gheață, praf și diverse impurități. Compoziția atmosferei variază atît cu altitudinea cît și pe suprafața terestră. Atmosfera nu are o limitare precisă, ea trece treptat în spațiul interplanetar.

Masa atmosferei este enormă, ea fiind egală cu $6 \cdot 10^5$ tone. Greutatea acestei mase de aer exercită o presiune continuă pe suprafața Pămîntului, numită *presiune atmosferică.* Datorită presiunii atmosferice, pe suprafețele aflate în atmosferă, se exercită forțe de apăsare foarte mari.

Datorită greutății aerului straturile inferioare de aer sînt comprimate de către cele superioare. Deci densitatea atmosferică scade cu înălțimea.

EXEMPLU

Să se determine forța de apăsare exercitată de către aerul atmosferic pe una dintre fețele geamului unei ferestre de formă dreptunghiulară cu laturile de 80 cm și 120 cm.

Presiunea atmosferică are valoarea $H = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$.

Rezolvare. Forța de apăsare are intensitatea:

$$F = HS = 1{,}013 \cdot 10^5\ N/m^2 \cdot 0{,}96\ m^2 = 9{,}72 \cdot 10^4\ N.$$

Forța de presiune exercitată pe geam echivalează cu greutatea unei mase de 9,72 tone. Geamul rezistă acestei presiuni mari, deoarece el este presat pe ambele fețe.

Aerul aflat deasupra noastră și în jurul nostru apasă din toate părțile pe corpul nostru. Forțele de presiune mari exercitate asupra noastră nu sînt supărătoare pentru că organismul nostru s-a adaptat acestor condiții de presiune. Nu am putea să respirăm normal sau chiar să trăim, dacă această presiune s-ar modifica mult.

Presiunea atmosferică într-un punct al atmosferei este egală cu greutatea unei coloane de aer, cu secțiune egală cu unitatea și cu înălțimea egală cu diferența de nivel dintre acel punct și suprafața liberă a atmosferei. Această presiune nu se poate calcula, deoarece nu se cunoaște cu precizie limita superioară a atmosferei și datorită faptului că atmosfera nu este statică.

Presiunea atmosferică se poate determina experimental printr-o metodă simplă propusă de către fizicianul italian Torricelli în anul 1643.

Pentru determinarea presiunii atmosferice se folosește un tub cu lungimea de aproximativ un metru și închis la unul dintre capete, numit tub barometric sau tubul lui Torricelli. Tubul barometric se umple cu mercur, apoi se astupă cu degetul și se răstoarnă într-o cuvă cu mercur. Retrăgînd degetul se constată că o parte din mercurul din tub coboară în cuvă. Coloana de mercur rămasă în tub, măsurată de la suprafața liberă a mercurului din cuvă pînă la suprafața liberă a mercurului din tub, are o înălțime *h* de aproximativ 76 cm (fig. 9.11, *a* și *b*). Pe suprafața liberă a mercurului din tub presiunea este zero ($p_C=0$), deoarece deasupra acestei suprafețe este vid. Porțiunea tubului în care se află vid se numește cameră barometrică.

Mercurul fiind în echilibru, presiunea în toate punctele planului orizontal *AB*, care cuprinde și suprafața liberă a mercurului din cuvă, este constantă (fig. 9.11, *b*). Deci presiunile în punctele *A* și *B* sînt egale ($p_A = p_B$). În *A* se exercită presiunea atmosferică pe care o notăm cu *H*, deci $p_A = H$. În *B*, acționează presiunea hidrostatică datorată coloanei de mercur:

$$p_B - p_C = \rho g h,$$

deoarece $p_C = 0$, rezultă:

$$p_B = H = \rho g h.$$

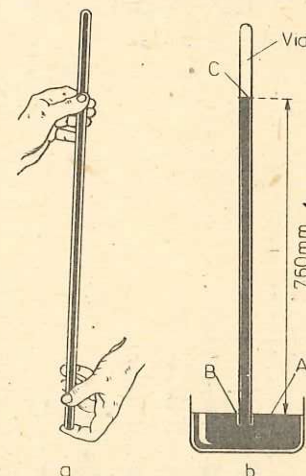


Fig. **9.11.** Experiența lui Torricelli.

Deci, presiunea atmosferică este egală cu presiunea hidrostatică a coloanei de mercur din tub. Măsurarea presiunii atmosferice, într-un anumit punct din atmosferă, se reduce la măsurarea lungimii coloanei de mercur *h*; ρ și *g* fiind mărimi cunoscute.

Cum presiunea hidrostatică este independentă de forma și secțiunea vasului, rezultă că dacă se înclină tubul sau se face experiența cu tuburi de forme diferite, înălțimea coloanei de mercur *h* nu se modifică (fig. 9.12).

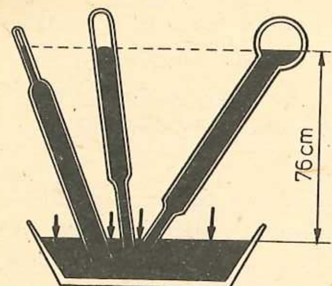


Fig. 9.12. Înălţimea coloanei de mercur este independentă de forma, de secţiunea şi de înclinarea tubului.

Presiunea atmosferică variază:

— cu *altitudinea*, datorită greutăţii aerului. Măsurătorile au arătat că această variaţie nu este uniformă (fig. 9.13);

— cu *starea vremii*. Starea vremii depinde de deplasarea maselor de aer atmosferic, adică de mişcările ciclonilor şi anticiclonilor atmosferici;

— *de la un loc la altul*. Pe hărţile meteorologice se observă linii continue, care unesc punctele în care presiunea are aceeaşi valoare la un moment bine determinat. Curbele acestea se numesc *izobare* şi sînt foarte utile pentru prevederea stării vremii.

Avînd în vedere că presiunea variază de la un loc la altul şi chiar în acelaşi loc de la o oră la alta, se impune definirea unei presiuni de referinţă, numită *presiune atmosferică normală*.

Presiunea atmosferică normală se consideră, prin convenţie, ca fiind egală cu 760 torr.

Exprimată în N/m^2 presiunea atmosferică normală are valoarea $H_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\ N/m^2$.

Instrumentele cu care se măsoară presiunea atmosferică şi se observă schimbările ei se numesc *barometre*. În practică se folosesc două feluri de barometre: *a) barometrul metalic*, a cărui funcţionare se bazează pe echilibrarea forţelor de presiune atmosferică de către forţele elastice ale unui resort; *b) barometrul cu mercur*, a cărui funcţionare se bazează pe echilibrarea presiunii atmosferice de către presiunea hidrostatică a unei coloane de mercur. Primul barometru de acest tip a fost tubul lui Torricelli.

9.3.6. **Măsurarea presiunii gazelor. Manometrul cu lichid.** Presiunile în fluide (gazoase sau lichide) se măsoară cu instrumente numite *manometre*. Vom descrie doar manometrul cu lichid folosit pentru măsurarea presiunii gazelor.

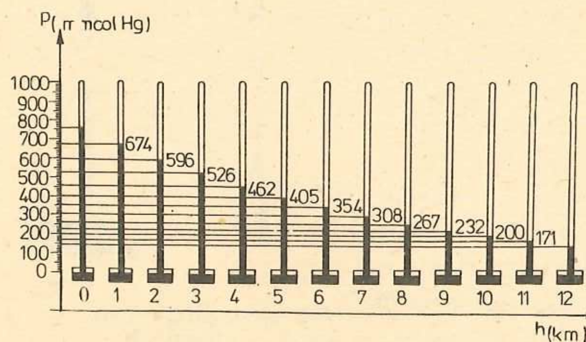


Fig. 9.13. Presiunea atmosferică variază cu altitudinea.

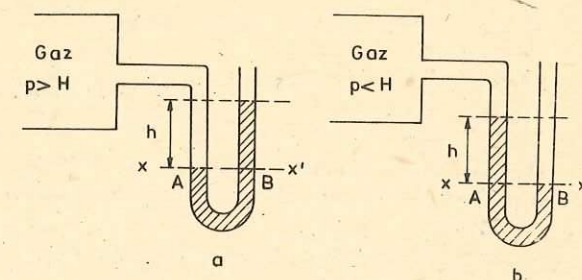


Fig. 9.14. Principiul manometrului cu lichid.

Manometrul cu lichid este alcătuit dintr-un tub în formă de *U*, deschis la ambele capete, în care s-a turnat un lichid de densitate ρ (spre exemplu mercur sau apă).

O ramură a tubului în *U* comunică cu atmosfera, iar cealaltă ramură comunică cu gazul de presiune *p*. În cazurile prezentate în figura 9.14, dacă *H* este presiunea atmosferică, presiunea de măsurat este dată de relaţia

$$p = H \pm \rho g h. \tag{9.6}$$

În relaţia (9.6) se ia semnul plus cînd $p > H$ şi semnul minus cînd $p < H$.

Diferenţa de presiune

$$p - H = \pm \rho g h, \tag{9.7}$$

se numeşte *presiune relativă* sau *presiune manometrică*.

Lichidul manometric se alege în funcţie de presiunea de măsurat. Spre exemplu, un manometru cu apă dă o denivelare de 13,6 ori mai mare decît un manometru cu mercur.

Pentru măsurarea directă a presiunii *p*, se foloseşte, în locul tubului în *U* deschis, un barometru cu sifon racordat cu un tub de cauciuc la recipientul care conţine gazul (fig. 9.15.) În acest caz presiunea gazului este echilibrată de presiunea hidrostatică a unei coloane de mercur *h*:

$$p = \rho g h.$$

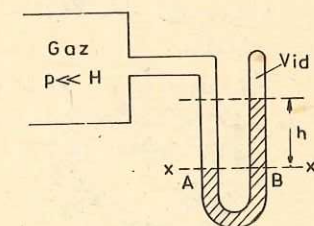


Fig. 9.15. Manometru cu lichid cu tubul închis, numit manometru barometric.

EXEMPLU

Un manometru cu mercur (fig. 9.14, *b*) este pus în legătură cu un gaz de presiune *p*. Denivelarea manometrică este $h = 5$ mm. Presiunea indicată de un barometru este $H = 753$ torr. Care este presiunea gazului? Care este denivelarea h_a, în cazul folosirii unui manometru cu apă?

Rezolvare. Presiunea gazului fiind mai mică decît presiunea atmosferică, rezultă

$$p = H - \rho g h.$$

Ținînd cont de valorile numerice obținem:

$$p = 753 \text{ torr} = 753 \text{ torr} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ torr}} = 0{,}99 \text{ atm} =$$
$$= 0{,}99 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \simeq 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ at}.$$

Dacă lichidul barometric ar fi apa, acest lichid ar trebui să producă o presiune hidrostatică egală cu aceea produsă de mercur:

$$\rho_{Hg} \cdot gh_{Hg} = \rho_a \cdot gh_a ;\ h_a = \frac{13\,600 \cdot 5}{1\,000} = 68 \text{ mm}.$$

9.3.7. Transmiterea presiunii în lichide. Legea lui Pascal

EXPERIMENT

Se umple complet cu apă un vas cu două deschideri tubulare (fig. 9.16) și se astupă fiecare deschidere cu un dop de cauciuc uns cu grăsime. Se are în vedere ca dopurile să fie în contact cu apa. Dacă se presează puternic pe unul dintre dopuri celălalt este aruncat în aer. Variația presiunii din B se transmite și în A și determină dopul A să sară din locașul său.

Experimentul descris mai sus ilustrează *legea lui Pascal* care se enunță astfel:

Presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul cît și la pereții vasului care-l conține.

Legea lui Pascal este o consecință a legilor staticii fluidelor și rezultă din acestea.

Fie p_A și p_B presiunile în punctele A și B dintr-un lichid în repaus (fig. 9.17). Conform principiului fundamental al hidrostaticii rezultă:

$$p_B - p_A = \rho g h.$$

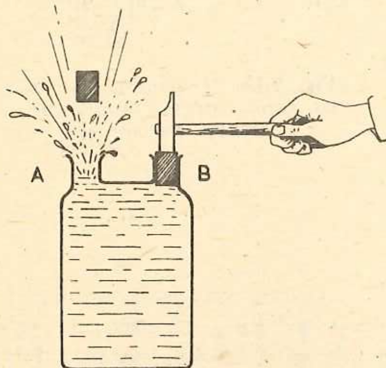


Fig. 9.16. Dispozitiv experimental pentru punerea în evidență a transmiterii presiunii printr-un lichid.

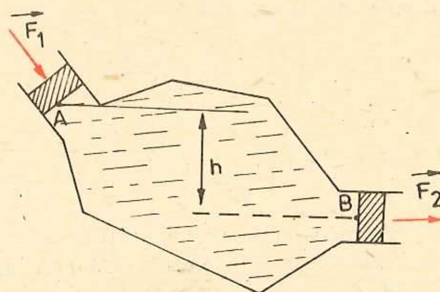


Fig. 9.17. Transmiterea presiunii printr-un lichid.

Cum mărimile ρ, g, h sînt constante, diferența de presiune este și ea constantă, chiar dacă se mărește sau se micșorează presiunea din punctele A și B. Deci, orice variație de presiune în A provoacă o variație egală de presiune în B, precum și în toate punctele lichidului.

9.3.8. Aplicații ale legii lui Pascal. Presa hidraulică. Una dintre aplicațiile principale ale legii lui Pascal este presa hidraulică al cărei principiu este dat în figura 9.18. Două vase cilindrice comunică între ele prin partea inferioară. Cei doi cilindri sînt închiși la partea superioară prin două pistoane mobile P și P_1.

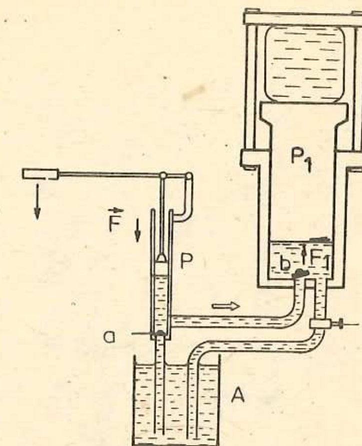


Fig. 9.18. Principiul de funcționare a presei hidraulice.

Se exercită pe pistonul P, de secțiune S, o forță normală $\vec{F}$. Această forță produce în toate punctele lichidului o creștere a presiunii, egală cu:

$$p = \frac{F}{S}. \qquad (9.8)$$

Această presiune este integral transmisă pe fața inferioară a pistonului P_1, de secțiune S_1, care este astfel acționat de o forță $\vec{F_1}$, de mărime:

$$F_1 = pS_1. \qquad (9.9)$$

Din relațiile (9.8) și (9.9) obținem:

$$F_1 = F\frac{S_1}{S}. \qquad (9.10)$$

Intensitatea forței F_1 este cu atît mai mare cu cît raportul ariilor fețelor pistoanelor este mai mare.

Presa hidraulică este folosită pentru a comprima paiele și bumbacul în baloturi, pentru a extrage uleiul din diferitele semințe, la fabricarea caroseriilor de automobil și a obiectelor din material plastic etc.

O aplicație a presei hidraulice este și sistemul de frînare al automobilelor, schematizat în figura 9.19.

O apăsare pe pedala *1* produce o creștere a presiunii în cilindrul *3*. Această creștere de presiune este transmisă prin intermediul lichidului *2*, pistoanelor *4*, care împing saboții *6*, pe tamburul *5*.

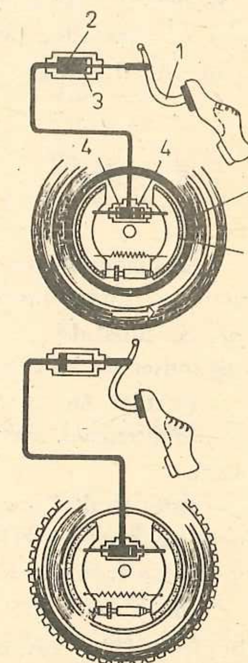


Fig. 9.19. Frîna hidraulică.

BLAISE PASCAL (1623—1662).



Matematician, fizician, filozof și scriitor francez. Pascal a fost un spirit precoce care s-a manifestat foarte timpuriu. La 12 ani, el regăsește singur, primele teoreme ale geometriei lui Euclid. La 16 ani, scrie un „Tratat despre secțiunile conice". Pascal este fondatorul teoriei probabilităților. A inventat o mașină de calcul în anul 1642.

În domeniul fizicii, activitatea lui Pascal a fost îndreptată, mai ales, asupra presiunii atmosferice și asupra vidului. Pascal a descoperit legea fundamentală a hidrostaticii care stă la baza tuturor sistemelor hidraulice.

9.3.9. **Legea lui Arhimede.** Pentru a introduce o sticlă goală într-o căldare cu apă, trebuie să se exercite asupra ei o forță de apăsare destul de mare. O minge de tenis de masă introdusă pe fundul unui vas cu apă și apoi lăsată liberă, iese singură la suprafață. Dacă o piatră grea este introdusă în apă, cînd este ridicată, ea pare mai ușoară decît în aer. Greutatea pietrei nu s-a modificat, pentru că forțele de atracție gravitațională sînt independente de natura mediului care separă corpurile. Fie că piatra este în aer sau în apă, forța de atracție pe care o exercită Pămîntul asupra ei, este aceeași. Rezultă că lichidul împinge corpul vertical în sus. Vom dovedi aceasta experimental.

EXPERIMENT

Se suspendă un cilindru de fier, cu ajutorul unui fir, de un dinamometru. Citim pe dinamometru greutatea sa, de exemplu 2,5 N. Se cufundă corpul în apă. Se constată că direcția firului de suspensie nu s-a modificat. Dinamometrul indică acum o forță de numai 1,5 N (fig. 9.20).

Rezultă că *un corp cufundat într-un lichid este împins de către lichid cu o forță verticală orientată de jos în sus. Această forță se numește forță arhimedică.*

Înlocuind cilindrul metalic cu un alt corp mai voluminos se constată că forța arhimedică este mai mare. Deci, *forța de împingere exercitată asupra unui corp cufundat într-un lichid crește cu volumul de lichid dezlocuit.*

Se cufundă acum corpul într-un alt lichid, în alcool sau în soluție de sare de bucătărie în apă și se constată că indicațiile dinamometrului s-au modificat. Deci, *forța de împingere exercitată de un lichid, asupra unui corp cufundat în el, depinde de densitatea lichidului.*

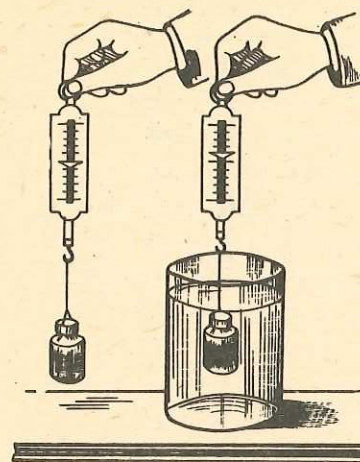


Fig. 9.20. Apa exercită asupra cilindrului o forță de apăsare verticală, orientată de jos în sus.

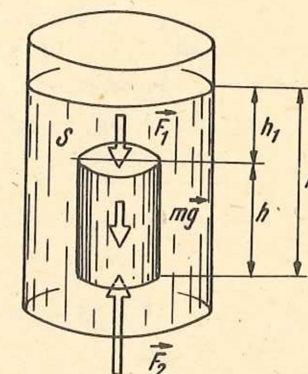


Fig. 9.21. Orice corp cufundat într-un fluid este împins vertical în sus cu o forță egală cu greutatea fluidului dezlocuit.

Legea lui Arhimede se enunță astfel:

un corp cufundat într-un fluid în repaus este împins cu o forță verticală de jos în sus, egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp.

Legea lui Arhimede este, de asemenea, o consecință a legilor fundamentale ale staticii fluidelor, și deci se poate deduce din acestea.

Considerăm un corp de forma unui cilindru drept cufundat în poziție verticală într-un lichid în repaus (fig. 9.21). Notăm cu S aria bazei și cu h înălțimea cilindrului.

Conform principiului fundamental al hidrostaticii, forțele de apăsare pe suprafața laterală a cilindrului își fac echilibru. Rezultanta forțelor de presiune verticale, normale pe bazele cilindrului, este:

$$F_A = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)S,$$

sau ținînd seamă de relația (9.4), obținem:

$$F_A = \rho g(h_2 - h_1)S = \rho h S g = G_l, \qquad (9.11)$$

unde $h = h_2 - h_1$ este înălțimea cilindrului, ρ este densitatea lichidului, iar G_l este greutatea lichidului dezlocuit de corp.

Deci, rezultanta $\vec{F}_A$ a forțelor de presiune exercitate asupra corpului cufundat în fluid, numită forță arhimedică, este egală și de sens opus cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp. Punctul în care se aplică forța arhimedică se numește *centru de presiune.* În general, centrul de presiune este diferit de centrul de greutate, în afară de cazul particular cînd corpul cufundat în fluid este omogen. În acest caz, centrul de greutate și centrul de presiune coincid.

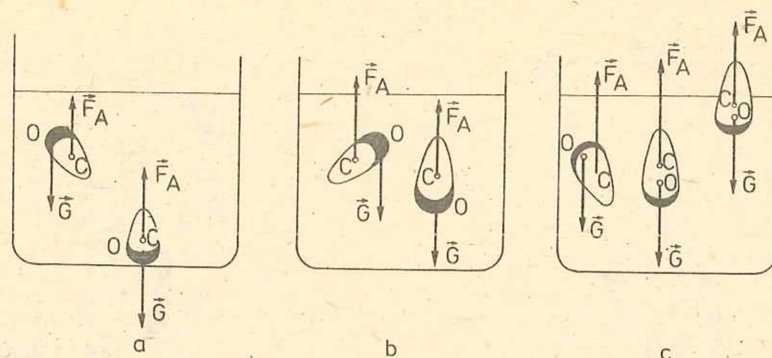


Fig. 9.22. Echilibrul corpurilor cufundate într-un lichid.

Legea lui Arhimede se aplică fluidelor lichide sau gazoase, lichidelor neomogene în repaus (de exemplu în cazul a două lichide care nu se amestecă, turnate unul peste altul) cît şi pentru corpurile necufundate complet.

9.3.10. **Plutirea corpurilor.** Un corp introdus într-un lichid este supus acţiunii a două forţe: greutatea sa $\vec{G}$ aplicată în centrul de greutate al corpului şi forţa arhimedică $\vec{F}_A$ aplicată în centrul de presiune C. Trei cazuri se pot ivi (fig. 9.22):

a) $G > F_A$. Rezultanta $\vec{G}_a = \vec{G} + \vec{F}_A$ se numeşte greutatea aparentă şi are modulul:

$$G_a = mg - \rho_f V g = mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right), \qquad (9.12)$$

unde ρ_f este densitatea fluidului iar ρ_s este densitatea solidului. Dacă $\rho_f < \rho_s$ corpul se cufundă.

b) $G = F_A$. Greutatea aparentă este zero şi corpul rămîne în echilibru în interiorul lichidului. Dacă corpul este omogen, condiţia se scrie: $\rho_f = \rho_s$. În acest caz centrul de presiune coincide cu centrul de greutate. Dacă solidul este neomogen, centrul de presiune şi centrul de greutate nu coincid. Pentru ca echilibrul să fie stabil este suficient ca centrul de greutate şi centrul de presiune să fie pe aceeaşi verticală, iar centrul de greutate să se găsească sub centrul de presiune.

c) $G < F_A$. Rezultanta $\vec{F}_a = \vec{G} + \vec{F}_A$ se numeşte forţă ascensională. Un corp cufundat este adus la suprafaţa lichidului de către forţa ascensională. Pe măsură ce corpul iese din lichid forţa arhimedică scade. În momentul cînd greutatea corpului echilibrează forţa arhimedică, corpul pluteşte în echilibru la suprafaţa lichidului.

Pentru un corp omogen condiţia de plutire la suprafaţa lichidului se scrie: $\rho_f > \rho_s$.

Condiţia de plutire a corpurilor se enunţă astfel: *dacă un corp pluteşte în echilibru în interiorul sau la suprafaţa unui lichid în repaus, greutatea corpului este egală cu greutatea volumului de lichid dezlocuit de corp.*

9.3.11. **Consecinţe şi aplicaţii ale plutirii corpurilor.**

A. *Corpuri în echilibru în interiorul unui lichid.*

Submarinul este o navă care poate pluti la suprafaţa apei. Submarinul posedă nişte rezervoare laterale numite balast-apă. Cînd acestea se umplu cu apă nava se scufundă, iar cînd apa este evacuată cu ajutorul pompelor, submarinul urcă la suprafaţă (fig. 9.23).

Batiscaful destinat explorărilor submarine funcţionează pe acelaşi principiu ca şi submarinul.

B. *Corpuri care plutesc la suprafaţa apei.*

Icebergurile sînt blocuri uriaşe de gheaţă care plutesc pe mare, deoarece densitatea gheţii este mai mică decît densitatea apei (fig. 9.24). Porţiunea din volumul unui iceberg cufundat în apă reprezintă 11/12 din volumul total.

Navele, datorită formei lor, dezlocuiesc un volum foarte mare de apă, în consecinţă forţa arhimedică este mult mai mare decît greutatea lor. O navă de 10 000 tone trebuie să dezlocuiască cel puţin 10 000 m^3 de apă pentru a putea pluti.

Plutirea navelor este stabilă cînd centrul de greutate se află pe aceeaşi verticală cu centrul de presiune şi deasupra centrului de presiune (fig. 9.25). Cînd nava oscilează centrul de presiune îşi schimbă poziţia. În acest caz greutatea $\vec{G}$ şi forţa arhimedică $\vec{F}_A$ formează un cuplu care tinde să readucă nava în poziţia iniţială. Suportul forţei arhimedice întîlneşte verticala de stabilitate într-un punct M numit metacentru. Echilibrul este stabil dacă metacentrul este deasupra centrului de greutate. Punctul M are o poziţie fixă în raport cu nava.

C. *Densimetrele* sînt instrumente utilizate pentru determinarea densităţii lichidelor.

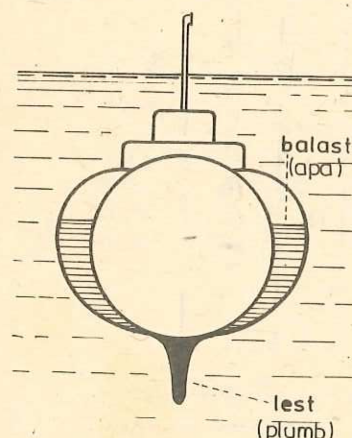


Fig. 9.23. Submarinul.

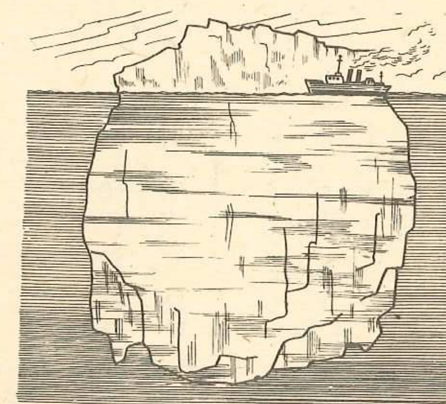


Fig. 9.24. Iceberg.

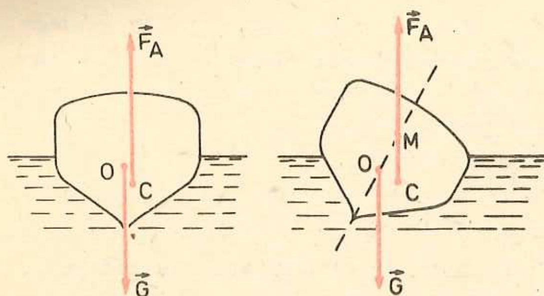


Fig. 9.25. Echilibrul unei nave.

Un densimetru este alcătuit dintr-un tub de sticlă numit plutitor, în care se află la partea de jos alice de plumb sau mercur, prelungit cu o tijă de sticlă subţire.

Densimetrele se gradează în unităţi de densitate. Gradaţiile se fac pe tija de sticlă.

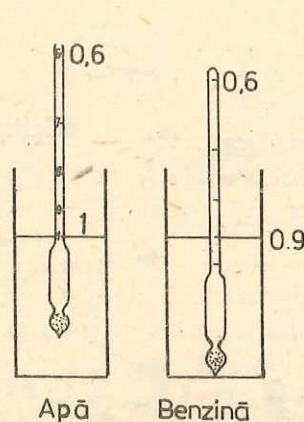
Există două feluri de densimetre:

— densimetre pentru lichide cu densitatea mai mică decît a apei, gradate de la *0,6* la *1*. Introduse în apă, acestea se cufundă pînă la baza tijei, unde se află gradaţia *1* (fig. 9.26). Gradaţia *1* de la baza tijei reprezintă densitatea apei de 1 g/cm^3;

— densimetre pentru lichide mai dense decît apa, gradate de la *1* la *2*. Introduse în apă, ele se cufundă pînă aproape de extremitatea superioară a tijei, unde se află gradaţia *1* (fig. 9.27).

EXEMPLE

1. O sferă cu densitatea $\rho_1 = 500$ kg/m^3 cade fără viteză iniţială de la înălţimea $h_1 = 20$ m, într-un bazin adînc, plin cu apă (fig. 9.28). Să se calculeze adîncimea la care se va opri sfera în apă. Densitatea apei este $\rho_2 = 1\,000$ kg/m^3; $g = 10$ m/s^2.



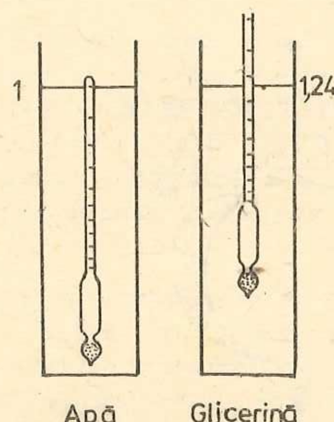


Fig. 9.26. Densimetre pentru lichide cu densitatea mai mică decît densitatea apei.

1 1,24

Apă Glicerină

Fig. 9.27. Densimetre pentru lichide cu densitatea mai mare decît densitatea apei.

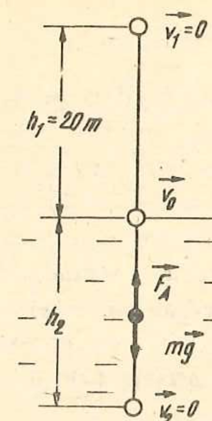


Fig. 9.28. La exemplul 1.

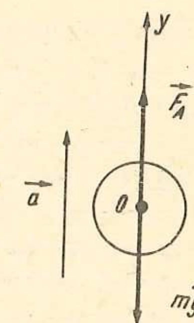


Fig. 9.29. La exemplul 2.

Rezolvare. a) *Calculul vitezei sferei în momentul cînd atinge suprafaţa apei.* Aplicînd formula lui Galilei obţinem:

$$v_0 = \sqrt{2gh_1} = 20 \text{ m/s}.$$

b) *Calculul acceleraţiei sferei în timpul mişcării ei în apă.* În timpul mişcării în apă asupra sferei acţionează forţa arhimedică $F_A = \rho_2 V g$ şi greutatea sa $G = mg$ (fig. 9.28). Scriem relaţia fundamentală a dinamicii pentru mişcarea sferei în apă:

$$F_A - mg = ma. \quad (9.13)$$

Din relaţia (9.13), obţinem:

$$a = \frac{F_A}{m} - g.$$

Înlocuind în această relaţie forţa arhimedică prin valoarea sa şi masa corpului prin $m = \rho_1 V$, obţinem:

$$a = g\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) = 10 \text{ m/s}^2.$$

c) *Calculul adîncimii* h_2, *la care se opreşte sfera:*

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2a} = 20 \text{ m}.$$

2. Un aerostat cu masa $m = 500$ kg şi volumul $V = 600$ m^3 se ridică pe verticală într-o mişcare uniform accelerată (fig. 9.29).
Să se calculeze înălţimea la care se ridică aerostatul în timpul $t = 10$ s. Densitatea aerului este $\rho = 1{,}3$ kg/m^3; $g = 10$ m/s^2. Se neglijează rezistenţa aerului.
Rezolvare. a) *Calculul acceleraţiei aerostatului.* Asupra aerostatului acţionează forţa arhimedică $F_A = \rho g V$ (unde ρ este densitatea aerului) şi greutatea $G = mg$. Scriind relaţia fundamentală a dinamicii pentru mişcarea aerostatului, obţinem:

$$F_A - mg = ma.$$

$$a = \frac{F_A}{m} - g = \frac{\rho g V}{m} - g = 5{,}6 \text{ m/s}^2.$$

b) *Calculul înălţimii la care urcă aerostatul în timpul* $t = 10$ s:

$$h = \frac{at^2}{2} = 280 \text{ m}.$$

9.4.1. **Curgerea staționară.** Prin curgerea unui fluid se înțelege deplasarea acestuia față de un sistem de referință dat. Un fluid ideal, adică un fluid incompresibil și lipsit de viscozitate, poate fi pus în mișcare datorită greutății sale și diferenței de presiune între diferitele puncte din interiorul său.

Fenomenele de mișcare a fluidelor au un caracter macroscopic, fluidele fiind asimilate cu medii continue. În cazul fluidelor continue este posibilă o mișcare care să constea din deplasarea diferitelor părți ale aceluiași corp una față de alta. Pentru descrierea curgerii unui fluid, îl vom considera alcătuit dintr-un număr foarte mare de particule, caracterizate prin aceea că au un *volum* foarte mic în raport cu acela al corpului.

Studiem mișcarea particulelor fluidului în raport cu un anumit sistem de referință, față de care fixăm pozițiile particulelor de fluid.

Mișcarea unui fluid este caracterizată prin distribuția vitezelor și a presiunilor în interiorul fluidului. Aceste mărimi variază de la un punct la altul. În același punct ele pot varia, de asemenea, în funcție de timp. În acest caz curgerea (mișcarea) fluidelor se numește nepermanentă (nestaționară) sau variată. De viteză este legată și noțiunea de *linie de curent. Se numește linie de curent la un moment dat t, linia curbă care are proprietatea că, la acel moment, vitezele diferitelor particule care se află pe ea îi sînt tangente* (fig. 9.30). În general aceste particule au traiectorii care nu se confundă cu linia de curent pe care se află ele la un moment dat t.

Cînd viteza în diferitele puncte ale spațiului ocupat de fluid nu depinde explicit de timp, ci numai de poziția în care se află particula de fluid considerată, curgerea se numește *staționară*.

În cazul curgerii nestaționare, forma liniilor de curent se schimbă de la un moment la altul. În cazul curgerii staționare, aspectul liniilor de curent rămîne neschimbat, forma lor fiind independentă de timp și atunci traiectoriile particulelor de fluid coincid cu liniile de curent. În curgerea staționară putem fixa poziția unei particule de fluid de-a lungul liniei de curent cu ajutorul coordonatei curbilinii s (fig. 9.30). Cum viteza și presiunea variază de la un punct la altul, înseamnă că ele sînt funcții de s:

$$v = v(s); \; p = p(s). \tag{9.14}$$

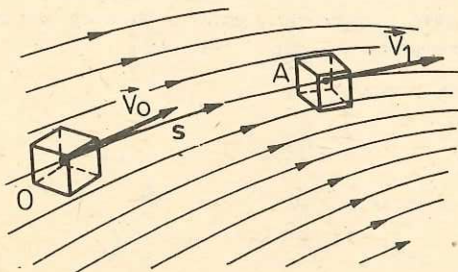


Fig. 9.30. Linii de curent în interiorul unui fluid ideal. În cazul mișcării staționare acestea coincid cu traiectoriile particulelor de fluid. Poziția unei particule de fluid pe linia de curent se poate determina cu ajutorul coordonatei curbilinii s, luată de-a lungul liniei de curent.

În curgerea staționară liniile de curent nu se intersectează. Astfel, liniile de curent, în cazul fluidului ideal, pot materializa pereții unui tub, prin care curge un fluid. De aceea liniile de curent care trec prin toate punctele unui contur închis formează un *tub de curent* (fig. 9.31).

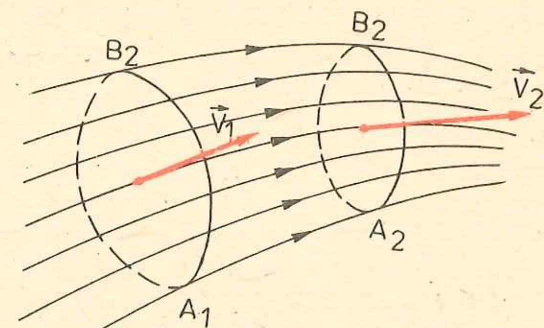


Fig. 9.31. Tub de curent.

9.4.2. **Ecuația de continuitate.** *Cantitatea de fluid care străbate o anumită arie în unitatea de timp reprezintă debitul de fluid prin acea arie.* Debitul poate fi de masă sau de volum, după cum cantitatea de fluid reprezintă o masă sau un volum de fluid.

Debitul de masă se exprimă prin relația:

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t},$$

unde Δm este masa de fluid care străbate o anumită arie în timpul Δt. Iar debitul de volum este dat de relația:

$$Q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

unde ΔV este volumul de fluid care străbate o anumită arie în intervalul de timp Δt.

Să considerăm un fluid în curgere staționară și din acesta să separăm un tub de curent (fig. 9.32). Debitul de volum prin ariile S_1 și S_2 are valorile:

$$Q_1 = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = S_1 v_1; \; Q_2 = S_2 v_2.$$

Fluidul fiind incompresibil, ariile S_1 și S_2 sînt străbătute de aceeași cantitate de fluid în unitatea de timp, deci:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \tag{9.15}$$

Relația (9.15) se numește *ecuația de continuitate.*

9.4.3. **Legea lui Bernoulli.** Această lege se aplică curgerii staționare a unui fluid ideal. Reamintim că un fluid ideal are următoarele caracteristici: *a)* nu are viscozitate; *b)* este incompresibil; *c)* viteza unei particule de fluid este independentă de timp.

Considerăm un tub de curent cu secțiunea variabilă. Vom studia curgerea fluidului cuprins între secțiunile S_1 și S_2 din tubul de curent (fig. 9.32).

Ca urmare a incompresibilității fluidului, volumul V_1 de fluid care traversează secțiunea S_1 în intervalul de timp Δt este egal cu volumul V_2 de fluid care traversează secțiunea S_2 în același interval de timp.

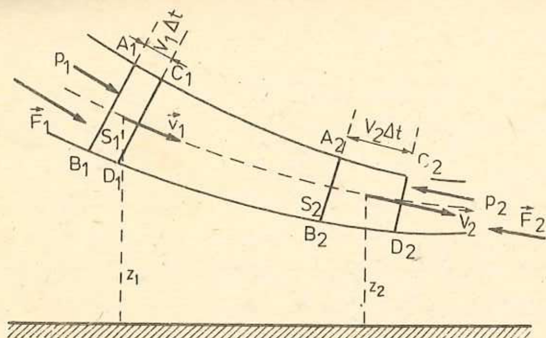


Fig. 9.32. Debitul de-a lungul unui tub de curent de fluid ideal în regim permanent este constant: $S_1v_1 = S_2v_2$. De-a lungul liniei de curent $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz =$ $=$ constant.

Înmulțind relația (9.15) cu Δt obținem:

$$S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t,$$

sau $S_1 \cdot A_1C_1 = S_2 \cdot A_2C_2$, de unde rezultă că

$$V_1 = V_2 = V.$$

Totul se petrece ca și cum în intervalul de timp Δt s-ar transfera direct din poziția $A_1B_1C_1D_1$ o masă de fluid $m = \rho V$, în poziția $A_2B_2C_2D_2$, fără ca lichidul intermediar să se fi mișcat.

Masa de fluid m are la traversarea secțiunii S_1 energia cinetică $\frac{1}{2}mv_1^2$, iar la traversarea secțiunii S_2 are energia cinetică $\frac{1}{2}mv_2^2$. Variația energiei cinetice a masei m, în intervalul de timp în care a fost transferată din poziția $A_1B_1C_1D_1$ în poziția $A_2B_2C_2D_2$, este:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad (9.16)$$

și ea trebuie să fie egală cu lucrul mecanic al forțelor ce se exercită asupra sistemului considerat în intervalul de timp Δt. Aceste forțe sînt forțele de presiune $F_1 = p_1S_1, F_2 = p_2S_2$ care acționează asupra lichidului cuprins între secțiunile S_1 și S_2 și greutatea mg a lichidului transferat.

În intervalul de timp Δt în care masa m traversează secțiunea S_1 sub acțiunea forței $\vec{F}_1$ al cărei punct de aplicație se deplasează pe distanța A_1C_1, se efectuează următorul lucru mecanic motor:

$$L_1 = F_1 \cdot A_1C_1 = p_1S_1 \cdot A_1C_1 = p_1V = p_1\frac{m}{\rho}.$$

În același interval de timp forța $F_2 = p_2S_2$ care se exercită perpendicular pe secțiunea S_2 efectuează următorul lucru mecanic rezistent:

$$L_2 = -F_2 \cdot C_2A_2 = -p_2V = -p_2\frac{m}{\rho}.$$

Lucrul mecanic al greutății masei de lichid transferate este:

$$L_3 = -mg(z_2 - z_1).$$

Egalînd variația energiei cinetice a masei m cu lucrul mecanic rezultant al forțelor ce se exercită asupra acestei mase, obținem:

$$(p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} + mg(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2), \quad (9.17)$$

sau

$$p_1 + \rho gz_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gz_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (9.18)$$

Aceasta este ecuația lui Bernoulli (1700—1782). Ecuația lui Bernoulli se mai scrie și astfel

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{constant} = C. \quad (9.19)$$

Constanta C este aceeași de-a lungul liniei de curent și este independentă de timp. Termenii din relația (9.19) au toți dimensiunile unei presiuni. Pentru a-i distinge, în enunțuri se utilizează denumirile: „presiunea statică" pentru p, „presiunea dinamică" pentru $(1/2)\ \rho v^2$, „presiunea de poziție" pentru ρgz, termen datorat energiei potențiale.

În cazul acțiunii fluidului asupra unui perete, pe un element de suprafață ΔS al peretelui se va exercita o forță de presiune $p\Delta S$, unde p se scoate din relația (9.19).

În cazul particular cînd tubul de curent este practic orizontal sau cînd energia potențială este neglijabilă, obținem:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = C. \quad (9.20)$$

9.4.4. **Aplicații ale legii lui Bernoulli.** Să considerăm un fluid care curge printr-o conductă cu secțiunea variabilă. În porțiunile înguste ale conductei prin care curge fluidul viteza acestuia crește; conform legii lui Bernoulli (9.20) crește și presiunea dinamică, de aceea trebuie să scadă presiunea statică, pentru ca suma lor să rămînă constantă. Presiunea statică la gîtuitură poate scădea sub presiunea atmosferică, astfel apare fenomenul de aspirație (fig. 9.33) pe care se bazează unele aplicații practice, cum ar fi pulverizatorul (fig. 9.34),

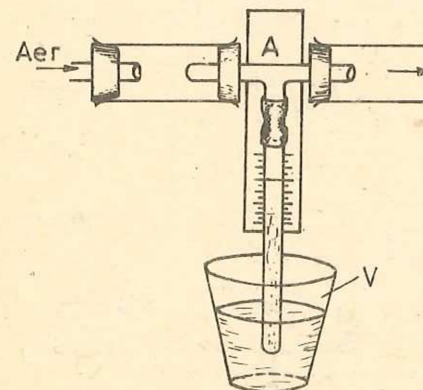


Fig. 9.33. Presiunea statică în porțiunea îngustă A a unei conducte poate să scadă sub valoarea presiunii atmosferice și provoacă aspirarea lichidului din vasul V.

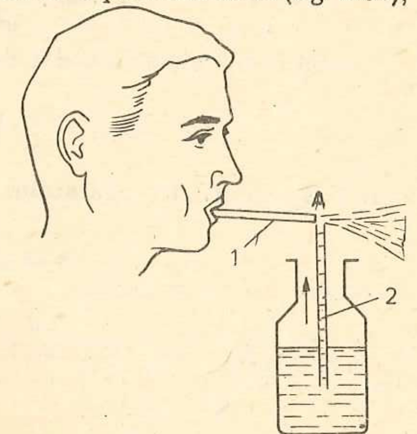


Fig. 9.34. Pulverizatorul. Datorită aerului suflat prin tubul *1*, în punctul A crește presiunea dinamică și scade presiunea statică sub valoarea presiunii atmosferice. Datorită acestui fapt lichidul urcă în tubul *2* pînă în A unde curentul de aer îl preface în picături fine.

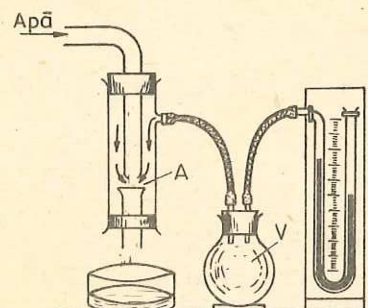


Fig. 9.35. Trompa de apă.

lampa Bunsen, trompa de apă, sonda de presiune, debitmetrele etc.

a) *Trompa de apă* (fig. 9.35) funcţionează astfel: în regiunea A presiunea dinamică creşte, scade presiunea statică şi ia naştere absorbţia aerului din vasul V, aer care este antrenat de jetul de apă.

b) *Sonda de presiune* este un tub manometric montat perpendicular pe o conductă prin care curge un fluid şi care serveşte la determinarea presiunii statice a fluidului (fig. 9.36).

c) *Tubul Venturi* se foloseşte la măsurarea debitelor de volum ale fluidelor (fig. 9.37). Pentru măsurarea debitelor se înlocuieşte o porţiune orizontală de conductă cu tubul Venturi cu secţiunea de intrare S_1 şi secţiunea porţiunii mai înguste S_2. În secţiunile S_1 şi S_2 vitezele fluidului sînt v_1 şi v_2. Aplicînd relaţia (9.20), se obţine

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2},$$

de unde

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)\rho. \qquad (9.21)$$

Folosind în relaţia (9.21) ecuaţia de continuitate (9.15), obţinem:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2.$$

Debitul de volum este dat de relaţia:

$$Q_V = S_1 v_1 = S_1\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho[(S_1/S_2)^2 - 1]}} = k\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \qquad (9.22)$$

unde k este constanta aparatului

$$k = S_1 S_2\sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2}}. \qquad (9.23)$$

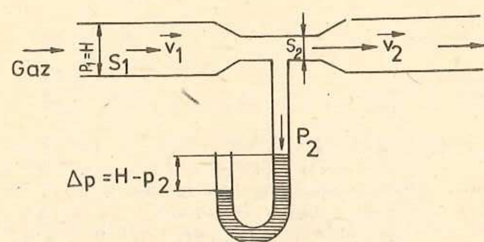


Fig. 9.36. Sonda de presiune.

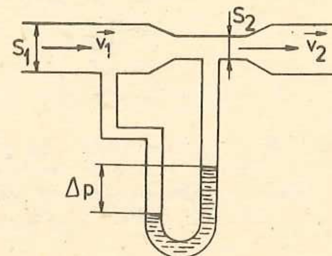


Fig. 9.37. Tubul Venturi.

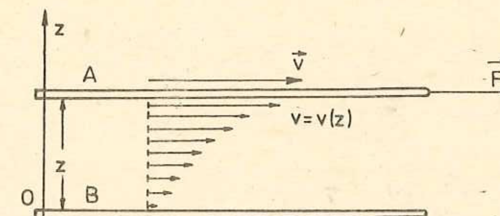


Fig. 9.38. Antrenarea straturilor de lichid vecine datorită viscozităţii.

9.4.5. **Viscozitatea.** La viteze nu prea mari, curgerea fluidelor este laminară (în straturi), adică liniile de curent sînt bine determinate şi nu se intersectează nicăieri între ele, fiecare particulă de fluid rămîne mereu în interiorul unui acelaşi tub de curent. La viteze mari, mişcarea devine turbulentă, neregulată, porţiunile de fluid se amestecă şi se formează vîrtejuri.

Să ne imaginăm două suprafeţe solide plane A şi B aşezate la o anumită distanţă una de alta într-un fluid viscos în repaus (fig. 9.38). Acţionăm cu o forţă $\vec{F}$ asupra suprafeţei A deplasînd-o cu o viteză $\vec{v}$ constantă în raport cu suprafaţa B. În timp ce suprafaţa A se deplasează în propriul său plan, suprafaţa B are tendinţa să se deplaseze în aceeaşi direcţie. Ne putem închipui că în interiorul lichidului deci şi între cele două suprafeţe plane există mai multe straturi paralele care alunecă unele faţă de altele, între care apar forţe de frecare internă sau de viscozitate. Stratul care se află în contact cu suprafaţa mobilă are aceeaşi viteză ca şi aceasta, în timp ce lichidul în contact cu cealaltă suprafaţă se află în repaus. Viteza straturilor intermediare creşte uniform de la o suprafaţă la alta, aşa cum arată figura 9.38. Stratul cu viteză mai mare caută să accelereze stratul cu viteză mai mică peste care el alunecă, şi invers stratul cu viteză mai mică caută să frîneze stratul cu viteză mai mare cu care este în contact. Astfel, ia naştere forţa de frecare $\vec{F'} = -\vec{F}$, care acţionează în planurile de lunecare, a căror viteză de curgere variază de la un strat la altul.

Dacă grosimea z a stratului de fluid dintre cele două suprafeţe creşte, aplicînd aceeaşi forţă $\vec{F}$ suprafeţei A, aceasta va căpăta o viteză mai mare: $v \sim z$. Dacă se măreşte aria S a suprafeţei A se constată o micşorare a vitezei plăcii, cînd este acţionată de aceeaşi forţă: $v \sim 1/S$. O creştere a modulului forţei $\vec{F}$ produce o creştere proporţională a vitezei v : $v \sim F$. Astfel viteza este proporţională cu forţa F, cu distanţa z şi cu $1/S$. Putem scrie următoarea relaţie:

$$v = \frac{Fz}{\eta S},$$

sau

$$\eta = \frac{Fz}{Sv}, \qquad (9.24)$$

unde η este un factor care depinde numai de natura fluidului şi de temperatura sa. Acesta se numeşte coeficientul de viscozitate al fluidului.

Unitatea de măsură pentru coeficientul de viscozitate în *SI* se numeşte decapoise, după numele fizicianului Poiseuille.

Avînd în vedere relaţia (9.24) obţinem:

$$1 \text{ decapoise} = 1 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2.$$

9.4.6. **Forţa de rezistenţă la înaintarea în fluide.** Din experienţa noastră ca ciclişti, motociclişti, sau ca pasageri în diverse vehicule, am constatat că aerul tinde să se opună mişcării corpurilor.

Mişcarea unui corp într-un fluid face să apară o *forţă de rezistenţă*, care este întotdeauna opusă mişcării.

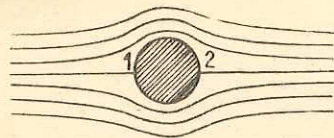


Fig. 9.39. Liniile de curent în jurul unei sfere într-o curgere laminară.

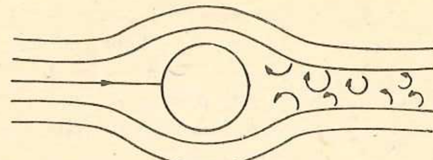


Fig. 9.40. Formarea turbioanelor în spatele unui cilindru de revoluție într-o curgere laminară.

Să considerăm cazul unui corp care posedă o axă de simetrie și care se deplasează în aer cu o viteză constantă care are aceeași direcție ca și axa de simetrie a corpului. Rezistența pe care o opune aerul mișcării corpului se datorează forțelor de frecare și forțelor de presiune. Distingem cazurile următoare:

a) Dacă mobilul se deplasează în aer cu o viteză pînă la 0,5 m/s, perturbațiile datorate forțelor de presiune sînt neglijabile. Mișcarea este perturbată de forțele de frecare. Forțele de frecare se datorează viscozității aerului. Acestea sînt tangente la suprafața corpului și admit o rezultantă care are ca dreaptă suport, axa de simetrie a mobilului, numită *rezistență de frecare.* În acest caz, rezistența este proporțională cu viteza. Fluidul alunecă în lungul pereților corpului și curgerea lui se numește *laminară* (fig. 9.39).

b) Dacă mobilul se deplasează cu o viteză cuprinsă între 1 m/s și 280 m/s, rezistența de frecare (datorată viscozității aerului) este mică în raport cu rezistența datorată forțelor de presiune. La aceste viteze, se produce în fața mobilului o zonă de suprapresiune și în spatele mobilului o zonă de depresiune, care dă naștere turbioanelor (fig. 9.40). În acest caz rezistența se datorează diferenței dintre forțele de presiune din fața și din spatele mobilului.

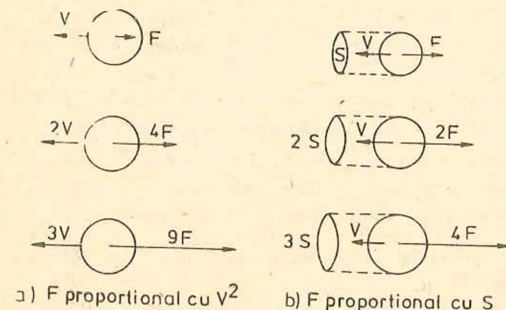
Studii experimentale, în tunele aerodinamice, au condus la concluzia că rezistența de înaintare în aer este proporțională cu:

— pătratul vitezei mobilului (fig. 9.41, *a*);

— densitatea aerului ρ, în condițiile experimentului;

— aria S a suprafeței obținută prin proiectarea corpului pe un plan perpendicular pe vectorul viteză, numită contur aparent (fig. 9.41, *b*).

Rezistența mai depinde de forma corpului.



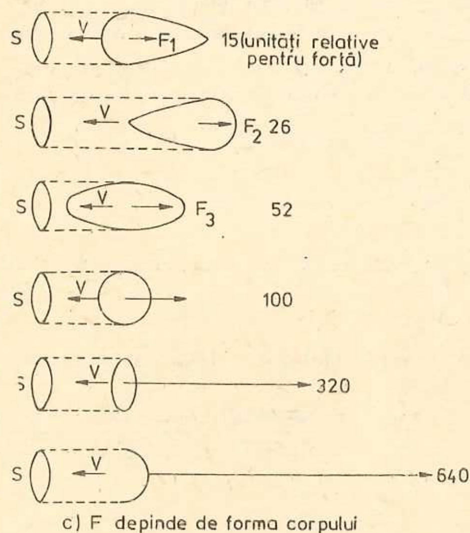


Fig. 9.41. Forța de rezistență a obiectelor aflate într-un lichid în mișcare este proporțională cu: *a)* pătratul vitezei fluidului; *b)* cu secțiunea transversală S a corpului. Depinde, de asemenea, de forma corpului (*c*) și de densitatea fluidului.

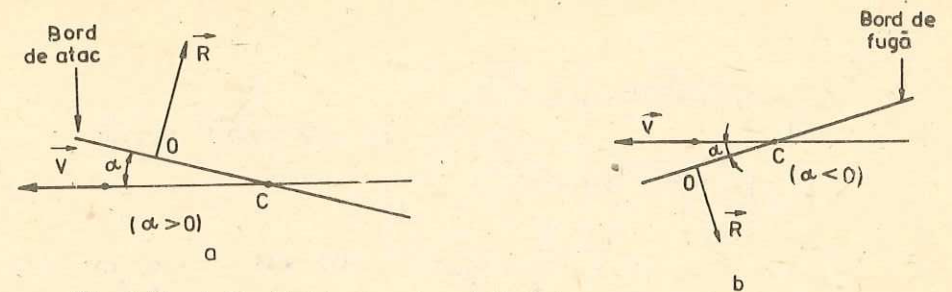


Fig. 9.42. *a)* Unghiul de atac al unei plăci plane; *b)* bordul de fugă al unei plăci plane.

Mărimea forței de rezistență este dată de relația următoare:

$$F = \frac{1}{2} CS\rho v^2. \qquad (9.25)$$

Factorul 1/2 este introdus din considerente teoretice. Coeficientul de proporționalitate C, este o constantă adimensională. Acest coeficient depinde de forma corpului și se mai numește și coeficient de formă în regim turbulent.

9.4.7. **Zborul avionului.** Să considerăm aripa unui avion de forma unei plăci plane dreptunghiulare, care se mișcă într-o atmosferă calmă cu viteza v. Fie α unghiul pe care-l face placa cu vectorul viteză v (fig. 9.42). Unghiul α se numește *unghi de atac.* Partea frontală a plăcii se numește bord de atac, iar partea diametral opusă se numește bord de fugă (fig. 9.42). Experiența arată că asupra plăcii acționează un sistem de forțe care admit o rezultantă R. Aceasta satisface următoarele condiții:

— are punctul de aplicație O, la o treime de bordul de atac;

— are direcția normală la placă;

— are un astfel de sens încît tinde să mărească unghiul α;

— intensitatea forței $\vec{R}$ este proporțională cu densitatea aerului, suprafața plăcii, unghiul de atac și pătratul vitezei:

$$R = C\rho\alpha S v^2. \qquad (9.26)$$

Această formulă este valabilă pentru unghiuri mici de atac și pentru viteze care nu depășesc 300 km/h.

Proiectăm forța $\vec{R}$ pe o axă paralelă cu viteza și pe o axă perpendiculară pe viteză (fig. 9.43).

Componenta $P = R \cos \alpha$ se numește *portanța aripei* (sau forță portantă) care învinge greutatea avionului. Componenta $T = R \sin \alpha$ se numește *rezistența frontală* și trebuie învinsă de către forța de tracțiune a avionului.

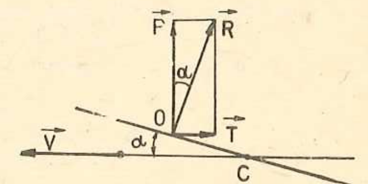


Fig. 9.43. Forța portantă.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Un rezervor cu apă este prevăzut cu un orificiu de secțiune S_2 foarte mică în raport cu secțiunea S_1 a rezervorului. Orificiul este construit astfel încît ghidează curgerea. Să se calculeze viteza de curgere a apei prin orificiu, neglijînd frecarea (fig. 9.44, *a* și *b*). Nivelul apei din rezervor se menține constant la valoarea $h = 1{,}8$ m($g = 10$ m/s²).

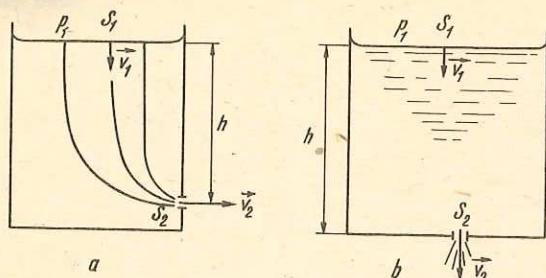


Fig. 9.44. *a* și *b*. La problema rezolvată.

Rezolvare. Notăm cu p_0 presiunea atmosferică, cu v_1 viteza lichidului la nivelul său superior și cu v_2 viteza lichidului la nivelul orificiului. Mișcării fluidului (presupus ideal), i se aplică legea lui Bernoulli:

$$p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Ținînd seamă de ecuația de continuitate: $S_1 v_1 = S_2 v_2$, obținem:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}}.$$

Cum secțiunea S_2 este foarte mică în raport cu S_1, avem:

$$v_2 = \sqrt{2gh} = 6 \text{ m/s}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un balon de cauciuc umflat cu hidrogen urcă în aerul atmosferic. Acest fapt poate fi o probă a existenței forțelor de presiune datorate aerului atmosferic? Justificați răspunsul. **R:** da.

2. Un pahar umplut cu apă pînă la refuz este acoperit cu o foaie de hîrtie. Se întoarce paharul cu gura în jos acoperind în acest timp foaia cu podul palmei. Foaia rămîne lipită de gura paharului și apa nu curge (fig. 9.45). Este aceasta o probă a existenței presiunii atmosferice? **R:** da.

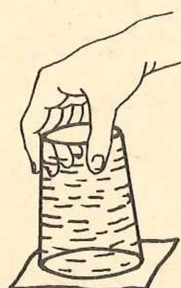


Fig. 9.45. Pentru exercițiul 2.

3. Se cufundă un corp într-un vas cu apă, astfel încît sub corp mai rămîne un strat foarte subțire de apă. Să va exercita, în acest caz, o presiune hidrostatică orientată de jos în sus? Justificați răspunsul. **R:** da.

4. Dacă o persoană se așază în apropierea unui tren care se deplasează cu o viteză oarecare, există riscul ca persoana să cadă sub tren? **R:** da.

5. Un remorcher trage două șlepuri (fig. 9.46). Explicați de ce cele două șlepuri au tendința să se apropie.

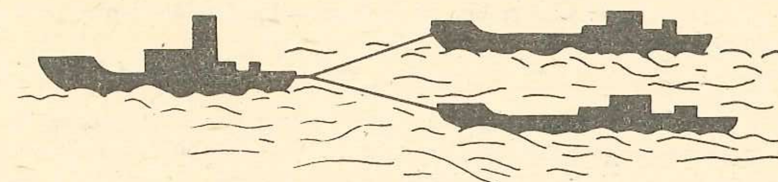


Fig. 9.46. Pentru exercițiul 5.

6. Două mingi de cauciuc se suspendă așa cum se arată în figura 9.47. Dacă între cele două mingi se suflă aer, acestea se vor apropia. Explicați fenomenul.

7. Se realizează dispozitivul din figura 9.48 alcătuit dintr-un disc ușor A făcut din carton și așezat în apropierea unui alt disc B prevăzut cu un orificiu pus în legătură cu un tub C. Dacă se suflă aer prin tubul C, discul A se apropie de discul B. De ce?

8. Un manometru cu lichid se compune dintr-un tub în formă de U care are o ramură deschisă iar cealaltă este legată la un recipient care conține un gaz sub o anumită presiune. Tubul se poate umple cu mercur ($\rho_1 = 13{,}6$ g/cm³), apă ($\rho_2 = 1$ g/cm³) sau cu ulei ($\rho_3 = 0{,}6$ g/cm³). Să se discute avantajele și dezavantajele utilizării fiecărui lichid. În ce condiții, fiecare dintre cele trei lichide, va fi mai util?

9. Un tub Torricelli are o lungime $l = 1$ m. Se înclină pînă cînd se umple complet cu mercur. În acest moment el face un unghi $\alpha = 49°10'$ cu nivelul liber al mercurului din cuvă. Să se determine presiunea atmosferică în acest loc.
R: $H = \rho g l \sin\alpha = 756{,}6$ mm col. Hg.

10. O bucată de lemn cu densitatea $\rho_1 = 700$ kg/m³ și cu masa $m_1 = 0{,}250$ kg, este prinsă de o bucată de plumb. Corpul format se introduce în apă ($\rho = 1\,000$ kg/m³). Să se calculeze greutatea plumbului pentru ca:
a) corpul format să plutească în echilibru în apă;
b) numai $f = 8/10$ din volumul total să fie cufundat în apă. Densitatea plumbului este $\rho_2 = 11\,350$ kg/m³, iar $g = 10$ m/s².
R: $(m_1 + m_2)g = \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right) f\rho g$: *a)* $G_1 = 1{,}18$ N; *b)* $G_2 = 0{,}38$ N.

11. Densitatea apei de mare este de 1,026 g/cm³. Care este presiunea datorată apei de mare la o adîncime de 1 km?
R: $p = \rho g\, h = 10{,}055 \cdot 10^6$ N/m².

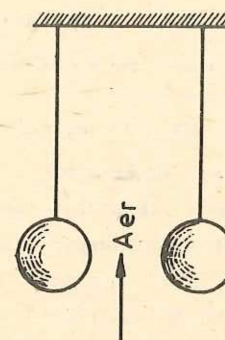


Fig. 9.47. Pentru exercițiul 6.

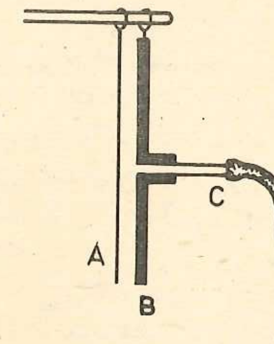


Fig. 9.48. Pentru exercițiul 7.

12. Pistonul mic al unei prese hidraulice are un diametru $d_1 = 1$ cm și este supus acțiunii unei forțe $F_1 = 10$ N. Care trebuie să fie diametrul pistonului mare d_2 pentru a suporta o sarcină $F_2 = 10\,000$ N?

R: $d_2 = d_1\sqrt{F_2/F_1} = 31,6$ cm.

13. Un corp din fontă cu masa $m = 20$ kg și densitatea $\rho = 7\,500$ kg/m³ poate să plutească pe suprafața mercurului de densitate $\rho_1 = 13\,600$ kg/m³. Calculați volumul porțiunii din corp cufundate în mercur și volumul total al corpului.

R: $V_1 = m/\rho_1 = 1\,470$ cm³; $V = 2\,667$ cm³.

14. O sferă din aluminiu are greutatea în aer $G = 2,58$ N. Greutatea sa aparentă în apă nu este decît $G_a = 1$ N. Demonstrați că sfera este goală în interior și calculați volumul cavității. Densitatea aluminiului $\rho = 2\,580$ kg/m³ ($g = 10$ m/s²).

R: $G_a = G - (V_1 + G/\rho g)\cdot\rho_0 g$; $V_1 = 58$ cm³.

15. Masa unui vapor este $m = 57\,800$ tone. Să se calculeze volumul părții cufundate în apă de mare cu densitatea $\rho_1 = 1\,028$ kg/m³, și apoi în apă dulce cu densitatea $\rho_2 = 1\,000$ kg/m³.

R: $V_1 = m/\rho_1 = 56\,226$ m³; $V_2 = m/\rho_2 = 57\,800$ m³

16. Un tub Torricelli este înclinat cu $\alpha = 45°$. Cu cît se deplasează mercurul în tub, cînd presiunea atmosferică variază de la $H_1 = 758$ la $H_2 = 764$ mm coloană de mercur?

R: $\Delta h = (\Delta H)/\rho g \cos\alpha = 8,5$ mm.

17. Printr-o conductă orizontală, cu secțiunea transversală variabilă, curge apă (fig. 9.49). Să se determine debitul de volum al apei ce curge prin conductă. Se dau secțiunile transversale $S_1 = 10^{-3}$ m², $S_2 = 2\cdot10^{-3}$ m² și diferența de nivel dintre coloanele de lichid din sondele de presiune montate pe conductă $\Delta h = 0,2$m.

R: $Q_V = S_1 S_2 \sqrt{2g\,\Delta h/(S_2^2 - S_1^2)} = 2,29\cdot10^{-3}$ m³/s.

18. Să se afle cu ce viteză scade nivelul apei dintr-un rezervor cu aria secțiunii transversale $S_1 = 1$ m², dacă viteza de curgere a apei printr-un orificiu, făcut în peretele lateral al rezervorului, este $v = 2$ m/s. Diametrul orificiului este de $d = 2$ cm.

R: $v_1 = \pi d^2 v/4\,S_1 = 6,28\cdot10^{-4}$ m/s.

19. Să se determine viteza de curgere a bioxidului de carbon printr-o conductă, dacă prin secțiunea transversală a conductei se scurge în timpul $t = 30$ minute o masă $m = 0,51$ kg. Densitatea gazului este $\rho = 7,5$ kg/m³ și diametrul conductei este $d = 2$ cm.

R: $v = 4\,m/\rho\,\pi d^2 t = 0,12$ m/s

20. Apa se scurge dintr-un tub cu diametrul interior $d = 2$ cm cu debitul de volum $Q_V = 8$ litri/min. Să se determine viteza apei în tub.

R: $v = 4\,Q_V/\pi d^2 = 42,4$ cm/s.

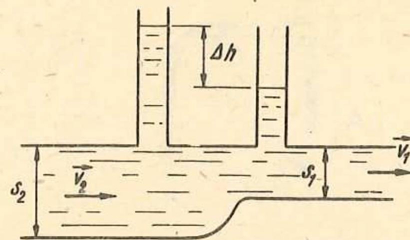


Fig. 9.49. La problema 17.

21. Un lichid cu densitatea $\rho = 900$ kg/m³, curge printr-o conductă cu diametrul $d = 6$ cm. Într-o secțiune unde diametrul scade la $d_1 = 4,2$ cm, presiunea este cu 1 600 N/m² mai mică decît presiunea din cealaltă secțiune a conductei. Să se calculeze viteza lichidului în secțiunea conductei de diametru d.

R: $v = \sqrt{(2\,\Delta p)/\rho[(d/d_1)^4 - 1]} = 1,1$ m/s.

10

UNDE ELASTICE. NOȚIUNI DE ACUSTICĂ

10.1 OSCILATORUL LINIAR ARMONIC. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR

10.1.1. Mișcarea oscilatorie

EXPERIMENTE

1. De un fir lung și inextensibil, suspendăm un corp (bilă) pe care-l lovim astfel încît să nu-i imprimăm o deviație prea mare față de poziția de repaus (fig. 10.1, *a*). Un astfel de sistem mecanic este numit *pendul gravitațional.*

2. De un resort de oțel, suspendăm un corp și prin intermediul lui tragem resortul în jos (fig. 10.1, *b*). Sistemul începe să se miște în sus și în jos. Un astfel de sistem este numit *pendul elastic.*

3. Fixăm o bandă de oțel la unul din capete și apoi o deviem din poziția inițială ca în figura 10.1, *c*. Sistemul se numește *pendul cu arc lamelar.*

4. Turnăm apă într-un tub îndoit, din sticlă, cu diametrul de cîțiva cm. Astupăm unul dintre capete cu un dop de plută și suflăm aer la celălalt capăt. În acest fel coloana de apă este pusă în mișcare (fig. 10.1, *d*).

5. Pe marginea unui disc fixăm într-o poziție oarecare o bilă. Rotim discul cu viteză unghiulară constantă. Cu ajutorul unei lămpi de proiecție, proiectăm pe un ecran mișcarea bilei de pe disc (fig. 10.1, *e*). Vom constata că umbra bilei are o mișcare alternativă, dus-întors.

În toate cazurile studiate mai sus are loc o mișcare continuă de o parte și de alta (dus-întors) a poziției inițiale (de repaus) a corpului (sau a umbrei sale în cazul experimentului 5).

Această mișcare prezintă următoarele caracteristici:

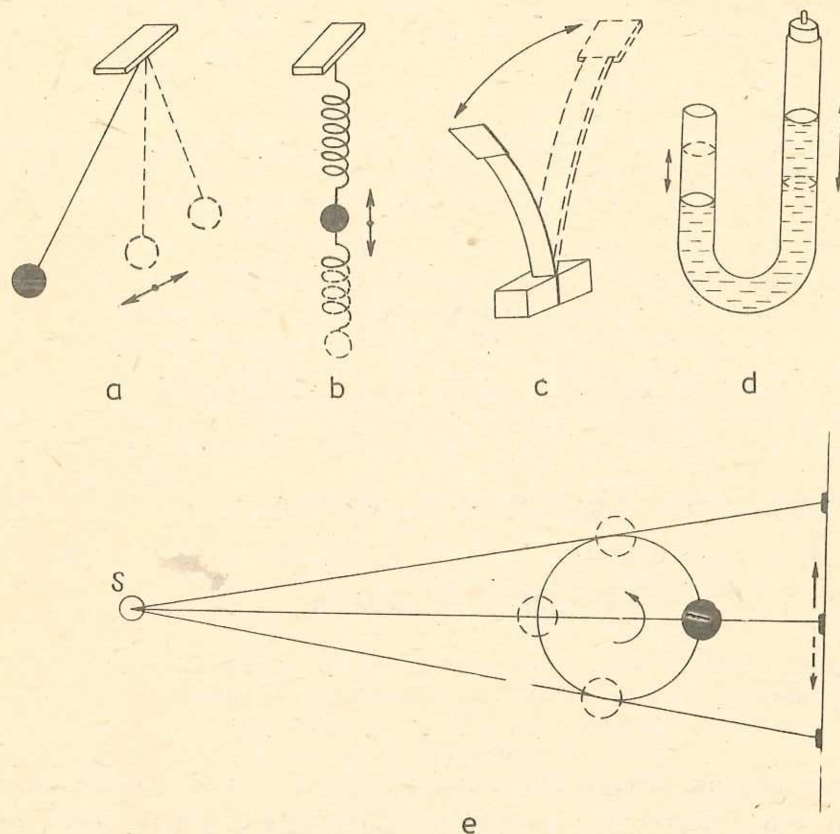


Fig. 10.1. Exemple de oscilatori: *a)* pendul gravitaţional; *b)* pendul elastic; *c)* pendul cu arc lamelar; *d)* coloană de apă oscilantă; *e)* proiecţia pe un ecran a unei mişcări circulare uniforme.

a) după intervale de timp egale, procesul individual de mişcare, se repetă, este un proces periodic;

b) mişcarea are loc de fiecare dată simetric faţă de o anumită poziţie, poziţia de repaus sau de echilibru a oscilatorului.

Mişcarea unui corp sau a unui sistem material, care se repetă la intervale de timp egale şi care se face simetric faţă de o poziţie de repaus se numeşte mişcare oscilatorie sau oscilaţie mecanică.

Pentru studiul mişcării oscilatorii se definesc următoarele mărimi fizice:

Perioada mişcării oscilatorii T, reprezintă timpul necesar efectuării unei oscilaţii complete.

Dacă notăm cu n numărul de oscilaţii efectuate de un oscilator în intervalul de timp t atunci avem:

$$T = \frac{t}{n}.$$

Unitatea de măsură în S.I. este:

$$[T]_{SI} = 1\text{s}.$$

Frecvenţa mişcării ν este numărul de oscilaţii efectuate în unitatea de timp:

$$\nu = \frac{n}{t}.$$

Unitatea de măsură pentru frecvenţă în S.I. este hertzul (Hz):

$$[\nu]_{SI} = 1\ \text{s}^{-1} = 1\ \text{Hz}.$$

Din relaţiile de definiţie ale frecvenţei şi perioadei rezultă relaţia:

$$\nu T = 1.$$

Elongaţia mişcării notată cu x sau y reprezintă deplasarea (depărtarea) oscilatorului faţă de poziţia de repaus la un moment dat.

Din definiţia elongaţiei rezultă că ea variază în timp. Această mărime are o valoare, o direcţie şi un sens, deci poate fi reprezentată printr-un vector $\vec{x}$ sau $\vec{y}$. În S.I. unitatea de măsură pentru elongaţie este metrul:

$$[x]_{SI} = 1\ \text{m}.$$

Amplitudinea mişcării A este elongaţia maximă x_{max} pe care o poate avea oscilatorul în cursul oscilaţiei.

Dacă în experimentele anterioare 1, 2, 3, 4, se lasă sistemele (corpurile) să oscileze un interval de timp mai mare, se observă că amplitudinea mişcării oscilatorii nu rămîne constantă în timp. În experimentul 5, însă, amplitudinea mişcării (a proiecţiei mişcării) rămîne neschimbată. Distingem deci două cazuri:

a) *mişcarea oscilatorie (oscilaţia) este neamortizată*, amplitudinea rămîne neschimbată de la o oscilaţie la alta;

b) *mişcarea oscilatorie (oscilaţia) este amortizată*, amplitudinea scade de la o oscilaţie la alta.

10.1.2. **Oscilatorul liniar armonic.** Să analizăm un resort elastic care are lungimea l în stare nedeformată (fig. 10.2, *a*). După legea lui Hooke deformarea unui resort elastic este proporţională cu forţa care acţionează asupra resortului. Forţa elastică care ia naştere în resort este, de asemenea, proporţională cu deformarea resortului dar de sens opus acesteia. Avem, deci:

$$\vec{F}_e = -k\vec{y} \quad \text{sau} \quad F_e = -ky,$$

unde sînt considerate pozitive valorile citite începînd de la punctul cel mai de jos al resortului netensionat, în jos.

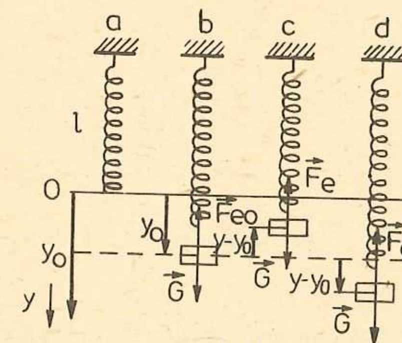


Fig. 10.2. Oscilator armonic liniar.

Dacă se suspendă de resort un corp cu masa m, el se va alungi cu y_0 datorită forței $\vec{G} = m\vec{g}$ (fig. 10.2, b) și de aici rezultă:

$$\vec{G} = m\vec{g} = k\vec{y}_0 = -\vec{F}_{e0} \qquad (10.1)$$

relație valabilă pentru poziția de repaus a pendulului elastic.

Scoțînd pendulul din poziția de repaus el începe să oscileze vertical, forța $\vec{G}$ îndreptată în jos își păstrează valoarea, în timp ce forța elastică $\vec{F}_e$ din resort variază în funcție de alungirea y a acestuia (fig. 10.2, c,d). Suma vectorială a celor două forțe sau diferența valorilor lor dă ca rezultantă forța care la orice moment tinde să aducă pendulul spre poziția de repaus. Se obține pentru această forță expresia:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{G} = -k\vec{y} + k\vec{y}_0 = -k(\vec{y} - \vec{y}_0)$$

sau

$$F = -k(y - y_0). \qquad (10.2)$$

Așadar forța care acționează asupra pendulului elastic în timpul oscilației este proporțională cu deplasarea (depărtarea) față de poziția de repaus, și de sens contrar acesteia adică este o forță de tip elastic.

Un punct material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe de forma $F = -ky$ (sau $F = -kx$) se numește oscilator liniar armonic. Mișcarea sa de oscilație este numită mișcare oscilatorie armonică.

Oscilatorul liniar armonic este un oscilator ideal.

Pentru a stabili legea mișcării oscilatorului armonic, dependența elongației y de timp, $y = y(t)$, ne vom folosi de mișcarea circulară uniformă a unui punct material și de proiecția acestei mișcări pe unul din diametrele traiectoriei.

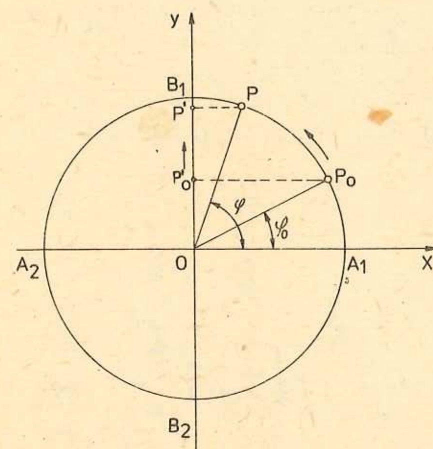


Fig. 10.3. Proiecția ortogonală a mișcării circulare uniforme a punctului P pe unul din diametrele traiectoriei (B_1B_2).

Să urmărim, în același timp, mișcarea circulară uniformă cu viteza unghiulară ω, pe un cerc de rază $R = A$, a unui punct material P de masă m și mișcarea proiecției sale P', proiecție ortogonală pe axa Oy (diametrul B_1B_2, în figura 10.3). În timp ce P face o rotație completă plecînd din A_1 în sensul indicat pe figură, proiecția sa P' efectuează o oscilație cu amplitudine constantă A, plecînd din O așa cum arată figura 10.4. Se observă următoarele: compo-

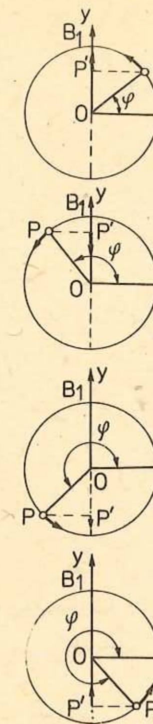


Fig. 10.4. Mișcarea concomitentă a punctului P și a proiecției sale P'.

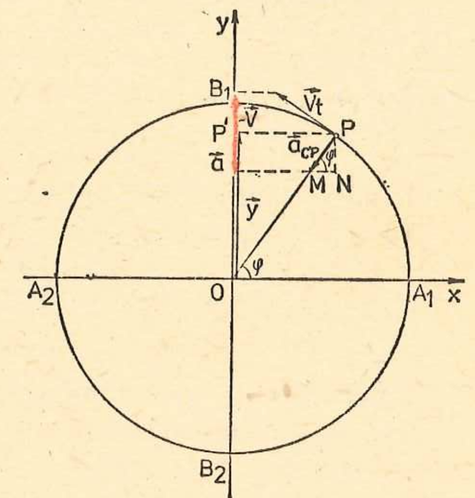


Fig. 10.5. Mișcarea oscilatorie a punctului P' poate fi descrisă ca proiecția pe diametrul B_1B_2 a mișcării circulare a punctului P.

nenta pe axa y a deplasării lui P este totdeauna aceeași cu deplasarea lui P'; componenta pe axa y a vitezei lui P este totdeauna aceeași cu viteza lui P'; componenta pe axa y a accelerației lui P este totdeauna aceeași cu accelerația lui P'. Deci mișcarea oscilatorie a punctului P' poate fi descrisă ca proiecția pe diametrul Oy a mișcării circulare uniforme a punctului P. Să arătăm că această mișcare oscilatorie este o mișcare oscilatorie armonică.

Se știe că în mișcarea circulară uniformă accelerația centripetă $\vec{a}_{cp}$ are valoarea $\omega^2 R$. Componenta sa pe diametrul B_1B_2 (fig. 10.5) reprezintă accelerația mișcării punctului P' și are valoarea:

$$a = -\omega^2 R \sin \varphi. \qquad (10.3)$$

Din figura 10.5 se observă că putem scrie:

$$y = R \sin \varphi. \qquad (10.4)$$

În acest caz relația (10.3) devine:

$$a = -\omega^2 y \quad \text{sau} \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{y} \qquad (10.5)$$

unde semnul minus semnifică faptul că accelerația $\vec{a}$ și elongația $\vec{y}$ au sensuri opuse.

Punctul P' se mișcă la fel ca și cînd ar fi un punct material de masă m și asupra lui ar acționa o forță F care să-i imprime accelerația dată de (10.5).

Deci:

$$F = ma = -m\omega^2 y. \quad (10.6)$$

Pentru valori determinate ale masei m și ale vitezei unghiulare constante ω, produsul $m\omega^2 = k$ și relația (10.6) devine:

$$F = -ky. \quad (10.6')$$

Așadar mișcarea punctului P' se face ca și în cazul în care forța sub acțiunea căreia are loc mișcarea este o forță de tip elastic și deci acest punct material descrie o mișcare oscilatorie armonică.

Știind că $\varphi = \omega t$ și că $R = A$ este amplitudinea mișcării oscilatorii, relația (10.4) devine:

$$y = A \sin \omega t. \quad (10.7)$$

Această relație reprezintă ecuația elongației oscilatorului liniar armonic, adică reprezintă legea de mișcare a oscilatorului, dependența $y = y(t)$.

Dacă proiecția mișcării punctului P se face pe diametrul A_1A_2 atunci se obține pentru ecuația elongației expresia:

$$x = A \cos \omega t.$$

Putem formula acum o altă definiție a mișcării oscilatorii armonice:

orice punct material care se mișcă rectiliniu, față de un SR, astfel încît legea de mișcare este de forma

$$y = A \sin \omega t \text{ sau } x = A \cos \omega t,$$

descrie o mișcare oscilatorie armonică.

Ținînd seama de relația (10.7) și de relația (10.5) expresia accelerației devine acum:

$$a = -\omega^2 A \sin \omega t. \quad (10.5')$$

Componenta vitezei liniare $v_t = \omega A$, pe diametrul B_1B_2 reprezintă viteza de mișcare a lui P', adică viteza mișcării oscilatorii armonice:

$$v = \omega A \cos \omega t. \quad (10.8)$$

Faza și perioada mișcării oscilatorii armonice. Argumentul funcției $y = A \sin \omega t$, $\varphi = \omega t$, se numește faza mișcării oscilatorii. Faza se măsoară în radiani și este una dintre mărimile de stare ale oscilatorului. Dacă în figura 10.3 oscilatorul P' ar fi fost la momentul inițial în P_0' (corespunzător punctului P_0 de pe cerc) faza la momentul $t_0 = 0$ ar fi fost φ_0. Atunci, la momentul t faza este $\varphi = \varphi_0 + \omega t$. Ecuația elongației se va scrie în acest caz:

$$y = A \sin (\omega t + \varphi_0). \quad (10.9)$$

Pentru mișcarea oscilatorie mărimea ω se numește pulsație și reprezintă viteza de variație a fazei. Această mărime se măsoară în S.I. în rad/s.

Ca și la mișcarea circulară, între frecvența ν, perioada T și pulsația ω, mărimi caracteristice mișcării oscilatorii, sînt valabile relațiile:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (10.10)$$

Din relația $k = m\omega^2$ ținînd seama de relația (10.10) obținem: $k = m \cdot 4\pi^2/T^2$ de unde rezultă:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (10.11)$$

Această relație reprezintă perioada oscilatorului liniar armonic și ea arată că perioada unui oscilator depinde de proprietățile sale inerțiale, prin masa m, și de cele elastice, prin constanta elastică k și nu depinde de condițiile inițiale în care se află oscilatorul.

EXPERIMENT

Cu un montaj ca cel din figura 3.65 se pot face determinări ale perioadei și frecvenței unui pendul elastic, evident neglijînd frecările interne și cele cu aerul. Se pune în oscilație pendulul, trăgîndu-l ușor cu mîna și apoi lăsîndu-l liber. Se numără oscilațiile n efectuate într-un interval de timp dat, t. Se modifică masa pendulului m prin adăugarea de discuri cu masa cunoscută.

Se pune din nou pendulul în stare de oscilație și se numără oscilațiile efectuate într-un timp determinat. Datele obținute se trec într-un tabel de forma celui de mai jos:

Dinamometrul 1 N							Dinamometrul 2,5 N					
Nr. crt.	n Nr. de oscilații	t (s)	m (kg)	T (s)	T_{mediu} (s)	k N/m	Nr. crt.	t (s)	m (kg)	T (s)	T_{mediu} (s)	k (N/m)

Cu datele obținute studiați dependențele $T = f(\sqrt{m})$ și $T = f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Ați putea indica eventualele surse de erori? Ce ar trebui făcut pentru a mări precizia determinărilor?

10.1.3. Energia oscilatorului armonic. După cum știți, un punct material de masă m, sub acțiunea unei forțe elastice $F = -ky$, descrie o mișcare oscilatorie armonică. La un moment dat t, elongația este $y = A \sin \omega t$ iar viteza mișcării $v = \omega A \cos \omega t$ (considerînd $\varphi_0 = 0$).

Cum energia de poziție în cîmpul forțelor elastice este $E_p = \frac{ky^2}{2}$, pentru oscilatorul liniar armonic avem:

$$E_p = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega t, \quad (10.12)$$

iar pentru energia cinetică a oscilatorului:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega t \quad (10.13)$$

(pentru că $m\omega^2 = k$).

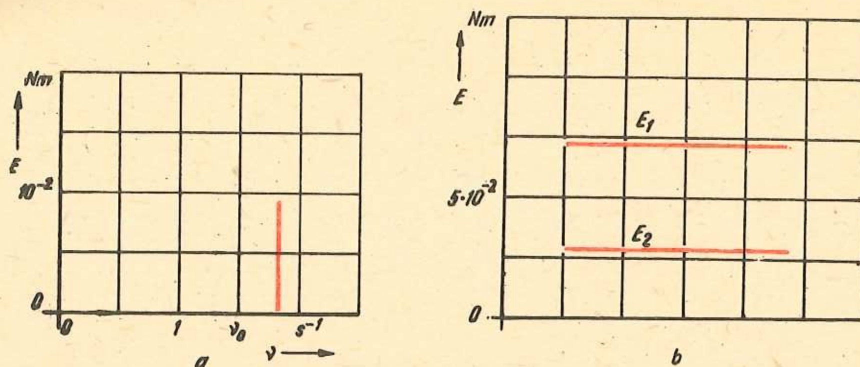


Fig. 10.6. *a)* Spectrul unei oscilaţii; *b)* schema nivelelor de energie a două oscilaţii.

Energia mecanică totală a oscilatorului liniar armonic este:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kA^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2\pi^2\nu^2 A^2 m. \tag{10.14}$$

Din relaţia 10.14 deducem că *energia totală a oscilatorului liniar armonic este constantă în timp* — este un invariant.

Se folosesc două moduri de reprezentare a energiei unui oscilator:

a) se reprezintă grafic energia în funcţie de frecvenţă (energia pe ordonată şi frecvenţa pe abscisă). Se obţine astfel un *spectru* al procesului respectiv. O oscilaţie armonică se reprezintă printr-o *linie spectrală* (fig. 10.6, *a*);

b) printr-o *schemă de nivele de energie.* Într-o schemă de nivele de energie, energia oscilatorului se reprezintă printr-o dreaptă orizontală situată la o înălţime corespunzătoare valorii energiei (fig. 10.6, *b*). Se spune că oscilatorul se află pe un anumit *nivel de energie.*

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp de masă m fixat de un resort de constantă k este deplasat cu distanţa x_0 faţă de poziţia de echilibru sub acţiunea unei forţe F. Lăsat apoi liber, corpul începe să oscileze armonic (fig. 10.7). Se cer: *a)* constanta elastică a resortului presupunînd valorile lui F şi x_0 cunoscute; *b)* perioada oscilaţiilor; *c)* viteza maximă atinsă de corp. (Se neglijează frecările.)

Rezolvare. a) Alungirea resortului pe distanţa x_0 este produsă de forţa F. Deci $k = F/x_0$.

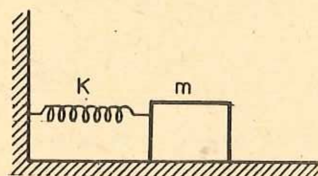


Fig. 10.7. Pentru problema rezolvată 1.

b) Din $k = m\omega^2$ obţinem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ şi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

c) Viteza oscilatorului este dată de relaţia $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$ şi este maximă cînd $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ deci $v_{max} = A\omega$ unde $A = x_0$ şi $\omega = \sqrt{k/m}$ şi deci $v_{max} = x_0\sqrt{k/m}$.

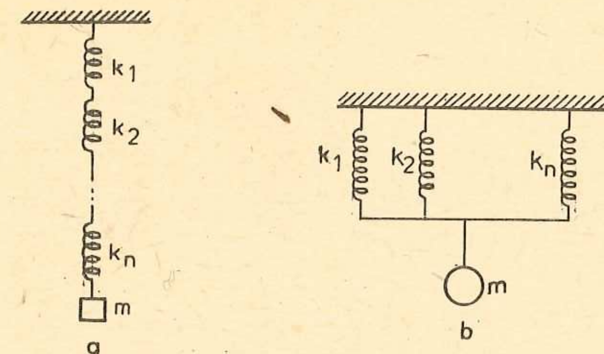


Fig. 10.8. Pentru problema rezolvată 2.

2. Să se calculeze perioada de oscilaţie a unui corp de masă m suspendat prin intermediul mai multor resorturi de constante $k_1, k_2, \ldots k_n$, cuplate: *a)* în serie; *b)* în paralel.

Rezolvare: a) Forţa elastică care acţionează asupra întregului sistem este:

$$F = k_{es} \cdot x$$

unde k_{es} este constanta echivalentă a resorturilor legate în serie. Se observă, din figura 10.8, *a*, că fiecare resort va avea o deplasare proprie x_i. Deci suma tuturor deplasărilor va fi tocmai deplasarea întregului sistem de resorturi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x.$$

Dar (neglijînd masele resorturilor) avem:

$$x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}, \ldots x_n = \frac{F}{k_n} \quad \text{şi} \quad x = \frac{F}{k_{es}},$$

şi înlocuind în relaţia deplasărilor obţinem:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \ldots + \frac{F}{k_n} = \frac{F}{k_{es}}.$$

După simplificare obţinem:

$$\frac{1}{k_{es}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}.$$

Ştiind că $m\omega^2 = k_{es}$, rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{es}}{m}} \quad \text{şi} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{es}}} = 2\pi\sqrt{m\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}}.$$

b) În acest caz din figura 10.8, *b* se vede că forţa rezultantă este

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.$$

Resorturile avînd fiecare aceeaşi deplasare x. Deci vom avea:

$$F = k_{ep}x; \ F_1 = k_1x; \ F_2 = k_2x, \ldots, F_n = k_nx.$$

Şi înlocuind în expresia forţei F obţinem:

$$k_{ep}x = k_1x + k_2x + \ldots + k_nx \quad \text{şi}$$

$$k_{ep}\, x = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x; \text{ după simplificare rezultă:}$$

$$k_{ep} = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \sum_{i+1}^{n} k_i.$$

Din $k_{ep} = m\omega^2$ avem:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{ep}}{m}} \text{ şi } T = \frac{2\pi}{\omega}. \text{ Deci } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{ep}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sum_{i=1}^{n} k_i}}.$$

10.1.4. **Compunerea oscilaţiilor.** Am văzut că sub acţiunea unei forţe de tip elastic un punct material descrie o mişcare oscilatorie armonică a cărei ecuaţie este de forma:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \text{ sau } y = a \sin(\omega t + \varphi)^*.$$

Ce se va întîmpla atunci cînd un punct material va fi solicitat să descrie în acelaşi timp două mişcări oscilatorii armonice? Ce fel de mişcare va avea în această situaţie punctul material?

Vom considera cazul în care cele două oscilaţii care solicită punctul material au aceeaşi direcţie şi aceeaşi pulsaţie (perioadă) dar amplitudinile şi fazele iniţiale diferite:

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \qquad (10.15)$$

$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Deplasarea y faţă de poziţia de echilibru va fi dată de suma algebrică a deplasărilor y_1 şi y_2 adică:

$$y_1 + y_2 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \qquad (10.16)$$

Să efectuăm această adunare cu ajutorul metodei fazorilor sau vectorilor rotitori.

Dacă vom considera un segment de dreaptă de lungime a_1 (fig. 10.9) care face cu axa Ox unghiul φ_1, drept un vector cu originea în O şi sensul de la O la A, adică vectorul $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA}$ şi dacă acest vector se va roti cu viteza unghiulară ω (constantă) în sens trigonometric, atunci proiecţia sa pe axa Oy la un moment oarecare t va fi:

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

relaţie care reprezintă tocmai ecuaţia unei mişcări oscilatorii armonice.

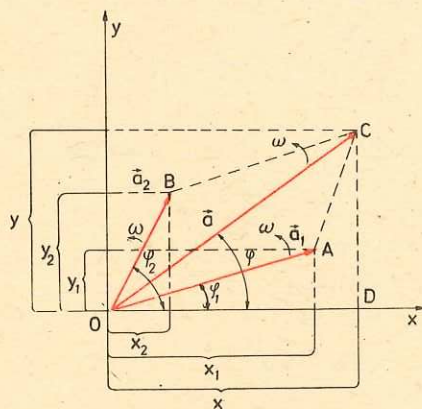


Fig. 10.9. Compunerea vectorilor rotitori care reprezintă mişcări oscilatorii armonice de aceeaşi pulsaţie.

Aşadar, putem reprezenta grafic prin vectori rotitori, fazori, o mişcare oscilatorie armonică.

Deci cele două mişcări oscilatorii descrise de ecuaţiile (10.15) pot fi reprezentate prin fazorii $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ care se rotesc

* Aici am notat amplitudinea cu litera a pentru a nu o confunda cu litera A din figura 10.9.

cu viteză unghiulară constantă ω, faţă de punctul O. Unghiul dintre vectorii $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$ rămîne neschimbat şi are valoarea $\varphi_2 - \varphi_1$.

Deoarece suma proiecţiilor a doi vectori pe o axă este egală cu proiecţia pe aceeaşi axă a vectorului rezultant înseamnă că oscilaţia rezultantă poate fi reprezentată prin vectorul rezultant $\vec{a}$, care se obţine din suma vectorială:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}. \qquad (10.17)$$

Din figura 10.9 avem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (10.18)$$

şi evident, vectorul rezultant $\vec{a}$ se roteşte cu aceeaşi viteză unghiulară ω ca şi vectorii $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$.

Tot din figura 10.9 obţinem şi relaţia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2} = \frac{CD}{DO} \qquad (10.19)$$

relaţie din care se poate determina unghiul φ, faza iniţială a oscilaţiei rezultante.

Oscilaţia rezultantă va fi dată de componenta vectorului $\vec{a}$ pe axa Oy adică va fi de forma:

$$y = y_1 + y_2 = a \sin(\omega t + \varphi). \qquad (10.20)$$

Aşadar, mişcarea rezultantă este o mişcare oscilatorie armonică care are aceeaşi direcţie ca oscilaţiile y_1 şi y_2 şi aceeaşi pulsaţie ω. Amplitudinea a şi faza iniţială φ ale oscilaţiei rezultante se determină în funcţie de amplitudinile şi de fazele iniţiale ale oscilaţiilor componente, după relaţiile (10.18) şi (10.19).

De reţinut că, potrivit relaţiei (10.18) amplitudinea oscilaţiei rezultante depinde de diferenţa de fază $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ a oscilaţiilor iniţiale, care se compun.

a) Dacă $\Delta\varphi = 2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, ...)$ atunci $\cos 2k\pi = 1$ şi obţinem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \text{ sau } a = a_1 + a_2.$$

Amplitudinea oscilaţiei rezultante este egală cu suma amplitudinilor oscilaţiilor componente a_1 *şi* a_2. *În acest caz se spune că oscilaţiile sînt în fază.*

b) Dacă $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$, $(k = 0, 1, 2, ...)$ atunci $\cos(2k + 1)\pi = -1$ şi obţinem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2, \quad a = |a_1 - a_2|$$

pentru că amplitudinea nu poate fi decît o mărime pozitivă.

Amplitudinea oscilaţiei rezultante este egală cu valoarea absolută a diferenţei amplitudinilor oscilaţiilor componente, a_1 *şi* a_2. *În acest caz se spune că oscilaţiile sînt în opoziţie de fază.*

c) Dacă $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ atunci $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$ şi obţinem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2$$

se spune că *oscilaţiile sînt în cvadratură sau „la sfert"*.

10.1.5. **Oscilaţii amortizate.** La studiul mişcării punctului material sub acţiunea unei forţe elastice, am presupus că nici o altă forţă nu mai acţionează asupra lui. În realitate, orice oscilaţie a unui punct material care nu este întreţinută din exterior, se amortizează; amplitudinea oscilaţiei scade cu timpul (fig. 10.10).

Cauzele amortizării sînt forţele care frînează mişcarea, de exemplu forţa de frecare în locul de suspensie la oscilaţia pendulului sau forţa de rezistenţă a mediului. În cazul unor rezistenţe mari ale mediului mişcarea devine aperiodică (fig. 10.11).

Teoretic, oscilaţiile unui punct (sistem) material ar trebui să înceteze complet numai după un interval de timp foarte mare — infinit. În realitate oscilaţiile încetează după un interval de timp relativ scurt deoarece în situaţia în care amplitudinea oscilaţiei ajunge sub o anumită valoare (de exemplu, de ordinul dimensiunilor moleculare) mişcarea sistemului material, luat ca întreg, devine imposibilă.

Energia transmisă unui sistem oscilant, în cazul amortizărilor, este cheltuită treptat sub formă de lucru mecanic necesar învingerii forţei de frecare. Pentru a întreţine oscilaţiile adică pentru a obţine oscilaţii neamortizate trebuie ca sistemul oscilant să primească mereu energie din afară.

Un sistem material în care amplitudinea oscilaţiei este menţinută neschimbată, datorită unei surse energetice care face parte din sistem se numeşte sistem autooscilant. (Un exemplu de astfel de sistem este ceasornicul cu pendul.)

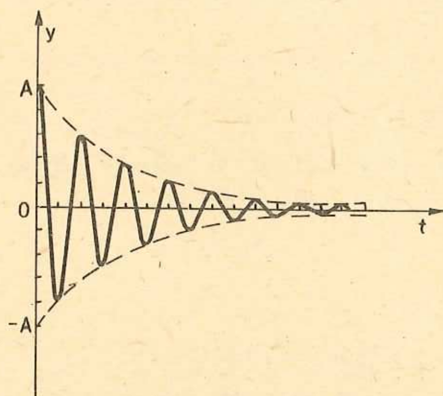


Fig. 10.10. Oscilaţii amortizate. Valoarea amplitudinii scade în timp.

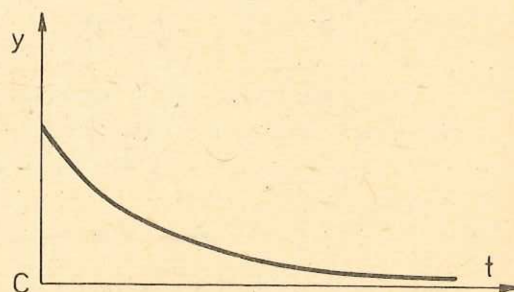


Fig. 10.11. Mişcare aperiodică.

10.2.1. **Pendulul gravitaţional.** Un pendul gravitaţional este un corp idealizat (experimentul 1 de la pag. 255) redus la un punct material de masă m, suspendat de un fir inextensibil şi de masă neglijabilă. Dacă pendulul este deplasat din poziţia sa de echilibru şi este lăsat liber, el oscilează într-un plan vertical datorită forţei de greutate. În figura 10.12 este reprezentat un pendul de lungime l, masă m, care formează cu verticala un unghi θ numit *elongaţie unghiulară*. Forţele care acţionează asupra lui sînt: $\vec{G} = m\vec{g}$, forţa de greutate şi $\vec{T}$ tensiunea din fir. Componenta lui G pe direcţia firului este $G_n = mg\cos\theta$ iar componenta tangenţială $G_t = mg\sin\theta$. Componenta tangenţială este forţa de restabilire sau de revenire care acţionează asupra pendulului spre a-l readuce în poziţie de echilibru. Aşadar, forţa de restabilire este:

$$F = G_t = mg\sin\theta. \tag{10.21}$$

Remarcăm că forţa F nu este proporţională cu elongaţia unghiulară θ ci cu $\sin\theta$. Mişcarea pendulului nu este deci o mişcare oscilatorie armonică. În acest caz nu se mai poate vorbi de o perioadă proprie de oscilaţie. Două oscilaţii cu amplitudine diferită au perioade diferite, oscilaţiile nu mai sînt izocrone.

Dacă unghiurile θ sînt mici atunci $\sin\theta$ este foarte apropiat de θ exprimat în radiani. Analizînd tabelul următor observăm că pentru unghiuri sub 5° putem scrie că $\sin\theta \approx \theta$ în radiani.

Unghiul θ		sin θ
grade	radiani	
0°	0,0000	0,0000
2°	0,0349	0,0349
5°	0,0873	0,0872

Dacă exprimăm unghiul θ în radiani avem $\theta = \frac{x^*}{l}$ şi vom obţine înlocuind $\sin\theta$ cu θ: $F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x = -kx$, unde, semnul minus indică faptul că această forţă este totdeauna de sens opus elongaţiei.

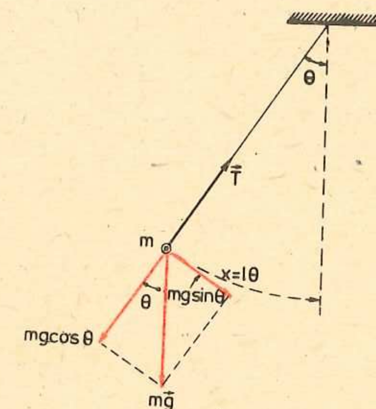


Fig. 10.12. Forţele care acţionează asupra unui pendul gravitaţional.

* Am notat cu x distanţa de la poziţia de echilibru, măsurată pe cerc astfel: $x > 0$ în dreapta poziţiei de echilibru şi $x < 0$ în stînga poziţiei de echilibru.

Aşadar pentru unghiuri mici, forţa de revenire spre poziţia de echilibru este aproximativ de tip elastic (forţă cvasielastică) şi mişcarea pendulului gravitaţional poate fi considerată în acet caz o mişcare oscilatorie armonică.

Cum $\frac{mg}{l} = k$, perioada proprie de oscilaţie a pendulului devine:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (10.22)$$

Din relaţia (10.22) reţinem că perioada pendulului gravitaţional este independentă de masa pendulului. Deoarece, pentru unghiuri mici, perioada pendulului gravitaţional este independentă de amplitudine, pendulul este folosit ca indicator de timp.

Pendulul gravitaţional oferă o metodă simplă pentru determinarea valorii acceleraţiei gravitaţionale g, măsurînd cu eroare cît mai mică lungimea l şi perioada proprie T a pendulului.

EXPERIMENT

De un fir lung şi subţire cu lungimea $l = 1$ m, suspendat la un capăt, se atîrnă o mică sferă de plumb (oţel sau bronz) cu un diametru de 2—3 cm. Se scoate pendulul astfel format din poziţia de echilibru, deplasîndu-l faţă de verticală cu un unghi θ care să nu depăşească 5° şi se lasă apoi liber. Sistemul începe să oscileze. Se notează un anumit număr n de oscilaţii şi timpul t corespunzător acestora. Perioada de oscilaţie se determină din relaţia $T = t/n$. Considerînd sistemul bilă — fir un pendul gravitaţional, din expresia perioadei $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ obţinem $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, relaţie din care putem determina valoarea acceleraţiei gravitaţionale locale. Rezultatele unui număr mare de determinări se trec într-un tabel de forma:

nr. crt.	n oscilaţii	t (s)	$T = t/n$ (s)	T_m (s)	g (m/s²)	g_m (m/s²)

Ce observaţii puteţi face? Coincid rezultatele determinărilor? De ce? Care sînt erorile pe care credeţi că le-aţi făcut? Cum s-ar putea înlătura sau micşora aceste erori?

10.2.2. **Oscilaţii forţate. Transfer de energie între doi oscilatori. Rezonanţă.** Să presupunem că un sistem mecanic E, pe care-l vom numi excitator, care efectuează oscilaţii armonice de perioadă T şi amplitudine constantă,

exercită o acţiune asupra unui alt oscilator mecanic R cu perioada proprie de oscilaţie T_0, pe care-l numim rezonator. Experienţa arată că sistemul R are totdeauna o mişcare armonică cu perioada T pe care i-o impune oscilatorul E. Se spune că rezonatorul efectuează oscilaţii forţate sincronizate cu cele ale excitatorului. Acţiunea mecanică exercitată de excitator asupra rezonatorului se numeşte *cuplaj*.

EXPERIMENT

a) Două pendule simple (fig. 10.13), unul masiv P_1 şi altul uşor P_2, suspendate prin fire rigide, cu amortizare mică, sînt legate între ele prin intermediul unui resort de masă neglijabilă care nu este deformat atunci cînd pendulele sînt în repaus. Pendulul P_1, fiind pus în mişcare, exercită de fiecare dată asupra lui P_2 prin intermediul resortului, o forţă care variază cu elongaţia sa. Are loc în aceste condiţii, un transfer de energie de la P_1 către P_2. Pendulul P_2 oscilează cu aceeaşi frecvenţă ca P_1 şi dacă P_1 este ales mult mai greu ca P_2 forţa exercitată de P_2, respectiv energia transmisă către P_1 este neglijabilă.

b) Aceeaşi experienţă se mai poate realiza suprimînd resortul R şi suspendînd două pendule de o coardă bine întinsă (fig. 10.14). P_1 exercită asupra corzii în punctul de suspensie O_1 o forţă care se transmite punctului de contact O_2 al pendulului P_2 şi care va oscila cu frecvenţa (perioada) impusă de P_1. În acest caz amplitudinea de oscilaţie a lui P_2 este mult mai mică decît în cazul analizat înainte. Cuplajul este mai slab. Transferul de energie dintre cele două pendule — oscilatori se realizează cu pierderi mari.

c) Pe o coardă bine întinsă sînt suspendate mai multe pendule rezonatoare dar cu lungimi diferite (fig. 10.15) unele avînd pulsaţia (perioada) proprie inferioară, altele superioară, pendulului excitator P_1. Dacă P_1 este pus în stare de oscilaţie, se poate observa că celelalte pendule vor începe să oscileze

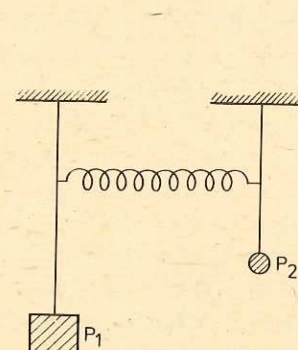


Fig. 10.13. Oscilaţii forţate ale pendulului P_2, cuplaj strîns.

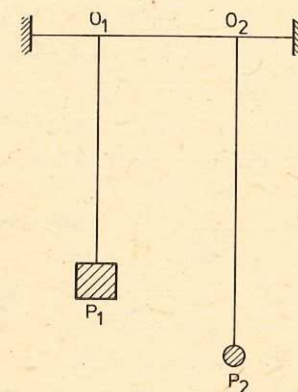


Fig. 10.14. Oscilaţii forţate ale pendulului P_2, cuplaj slab.

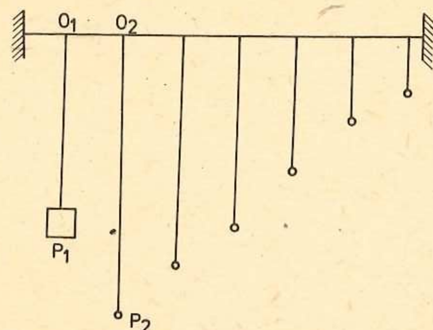


Fig. 10.15. Pendule rezonatoare cu diferite pulsații.

datorită transferului de energie prin coardă de la pendulul excitator. De remarcat un fapt interesant și anume că amplitudinea oscilatorilor este diferită. Ea este cu atît mai mare cu cît perioada proprie de oscilație a rezonatorului este mai apropiată, ca valoare, de perioada excitatorului. Dacă unul dintre pendulele rezonatoare are pulsația (perioada) proprie de oscilație foarte apropiată de cea a excitatorului, atunci amplitudinea sa de oscilație, în condițiile date este cea mai mare, este maximă. Are loc deci un transfer maxim (optim) de energie între cei doi oscilatori.

Transferul energiei de la excitator la sistemul excitat, transfer care se face pentru orice perioadă a excitatorului, este maxim pentru perioadele (pulsațiile) apropiate de perioada proprie a sistemului excitat. Procesul selectiv de transfer de energie între două sisteme fizice se numește rezonanță.

10.3. PROPAGAREA MIȘCĂRII OSCILATORII

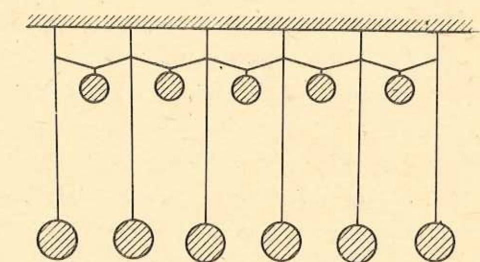
10.3.1. **Propagarea unei perturbații.** *a)* Un cablu lung de cauciuc (o coardă, un resort) bine întins, lovit la unul din capete ne permite să observăm transmiterea unei mici deformații pînă la celălalt capăt al cablului, după un anumit timp din momentul lovirii.

b) Ne aflăm pe marginea unui bazin cu apă a cărui suprafață este netulburată de valuri. Aruncînd o piatră în apă, observăm valuri mici de forma unor cercuri concentrice a căror rază crește foarte repede. Mai tîrziu vedem aceste mici valuri la distanțe mari față de locul în care am aruncat piatra. Perturbația provocată prin căderea pietrei pe suprafața apei n-a rămas localizată ci s-a transmis pe suprafața apei din bazin.

c) Ne aflăm pe un stadion. Asistăm la o întrecere sportivă: cursă cu obstacole, ștafetă etc. S-a dat startul. Vedem mai întîi mica flacără și fumul produs de pistolul de start și ceva mai tîrziu auzim și pocnetul (sunetul) produs de cartușul percutat.

Iată, în exemplele anterioare, cîteva cazuri particulare ale unei situații generale în natură: sistemele materiale nu „răspund" la perturbațiile exterioare, decît după un anumit timp de la producerea lor. Știți deja că un sistem material este un ansamblu de corpuri (eventual cîmpuri fizice) între care se exercită interacțiuni, forțe. Aceste forțe depind în general de distanțele relative dintre componentele sistemului. Mai mult, chiar, interacțiunile interne scad, uneori foarte repede, cînd distanțele dintre componente cresc. În acest fel, de multe ori, deformația sistemului se realizează din aproape în aproape

fiecare componentă influențînd numai pe cele imediat apropiate. Acesta este motivul pentru care „răspunsul" sistemului apare întîrziat față de perturbația externă aplicată.


Fig. 10.16. Lanț de bile prin care se pot transmite perturbații.

EXPERIMENT

Pe o bară cu lungimea de 1,5—2 m, suspendăm mai multe bile identice cu diametrul de 2,5—3 cm (fig. 10.16). Firele de suspensie au lungimea de 1—1,2 m iar distanța dintre aceste fire este de 10—15 cm. Firele de suspensie sînt legate între ele prin fire scurte de care sînt atîrnate corpuri identice cu masa de 100 g fiecare. Un șoc, un impuls, aplicat transversal la unul din capetele lanțului de bile se va transmite din aproape în aproape pînă la celălalt capăt al lanțului. Lanțul de bile legate între ele ne permite să observăm că perturbația produsă din exterior nu rămîne localizată, nu oscilează numai bila lovită ci oscilația se propagă din aproape în aproape în tot lanțul de bile.

Să considerăm un lanț de bile (particule), identice ca formă și avînd aceeași masă, legate între ele prin resorturi de aceeași lungime și aceeași constantă elastică (fig. 10.17). Lanțul de bile legate prin resorturi modelează mediile reale în care se pot propaga perturbații produse din exterior. Aparent există o mare deosebire între lanțul de particule și mediile (corpurile reale) din exemplele anterioare. În fizică este folosită metoda modelării obiectului sau fenomenului de studiat, construindu-se sisteme—modele ideale, care păstrează proprietățile esențiale ale obiectului sau fenomenului real. Pe aceste modele se pot obține rezultate ce aproximează bine realitatea.

În cazurile prezentate la începutul paragrafului, elementele esențiale ale propagării sunetului în aer respectiv ale propagării perturbației pe suprafața apei și pe tubul de cauciuc sînt legate de structura mediului prin care trec aceste perturbații (aer, apă, cauciuc). Aceste medii au o structură corpusculară, sînt constituite din atomi sau molecule între care se exercită forțe de legătură care pot fi considerate forțe elastice cu bună aproximație.

Presupunem că, inițial, resorturile lanțului sînt complet relaxate. Acționăm din exterior cu o forță $\vec{F}$ asupra bilei *1* din capătul lanțului, deplasînd-o spre dreapta. Să urmărim ce se întîmplă în timpul deformării resortului. Asupra bilei *2* va începe să acționeze o forță F' mai mică decît F, egală cu dife-

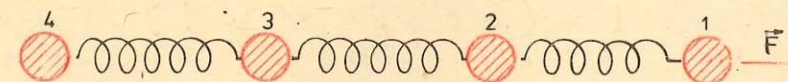


Fig. 10.17. Lanț de bile și resorturi, model de mediu elastic.

rența dintre tensiunea din resortul $1-2$ și cea din resortul $2-3$ (aceste tensiuni sînt de sensuri opuse cînd sînt aplicate asupra bilei 2).

Dacă acceptăm că tensiunea din resortul $1-2$ este cel mult egală cu forța externă, rezultă că asupra bilei 2 va acționa mereu o forță mai mică decît asupra bilei 1. Înseamnă că accelerația bilei 2 va fi mereu mai mică decît cea a bilei 1 și deci, la orice moment intermediar, între aplicarea forței externe și întinderea maximă a resortului $1-2$, bila 2 va avea o depărtare mai mică față de poziția de echilibru decît bila 1. Considerînd tensiunea din resortul $1-2$ ca o forță externă aplicată bilei 2 constatăm că depărtarea de poziția de echilibru a bilei 2 va fi totdeauna mai mare decît cea a bilei 3. În acest fel, continuînd raționamentul, se poate înțelege de ce fiecare bilă — particulă se depărtează de poziția de echilibru cu o distanță mai mică decît precedenta și mai mare decît următoarea (fig. 10.18).

Considerînd lanțul suficient de lung ajungem la concluzia că trebuie să existe o bilă-particulă în acest lanț, fie n aceasta, care pînă la un anumit moment de la aplicarea forței $\vec{F}$ nu se deplasează din poziția de echilibru. Aceasta înseamnă că tensiunea din resortul $n-(n+1)$ este nulă și deci nici bilele $(n+1)$, $(n+2)$, ... nu se deplasează din pozițiile lor inițiale. Această situație are loc pînă la un anumit moment t. În momentul imediat următor, particula n intră în mișcare și începe să întindă resortul $n-(n+1)$. În acest fel lanțul tinde să repartizeze uniform, răspunsul la forța externă, $\vec{F}$, între toate resorturile sale. Dar, după cum am constatat, acestea nu se întind în același timp și putem ajunge la situația în care forța $\vec{F}$ poate să dispară la un moment dat, și să găsim totuși în lanț resorturi întinse sau comprimate. Mișcarea se transmite, se propagă, astfel din aproape în aproape, de la un capăt la celălalt al lanțului chiar și după încetarea acțiunii externe.

Fenomenul de transmitere a unei perturbații într-un mediu material se numește undă.

Dacă în mediul material perturbat apar numai forțe elastice spunem că unda care ia naștere este o undă elastică.

Mulțimea particulelor-bile din sistem (mediu) care la momentul t nu au fost încă solicitate, dar care vor intra în mișcare în momentul imediat următor constituie ceea ce se numește *frontul undei*.

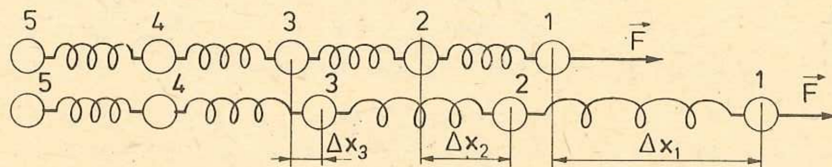


Fig. 10.18. Lanț de bile-resorturi sub acțiunea unei forțe.

10.3.2. **Surse de oscilații. Principiul lui Huygens.** Să reluăm analiza lanțului de bile-resorturi. Se poate întîmpla ca la un moment dat bila 1 să revină în poziția de echilibru după un număr oarecare de oscilații. S-ar părea că mișcarea ar trebui să înceteze, să se stingă, în lanțul de resorturi. Dar așa ceva nu se întîmplă. În momentul în care bila 1 se află din nou în poziție de echilibru există o altă bilă, chiar mai multe, care se află în situația identică cu cea din momentul inițial al bilei 1. Totul se petrece ca și cum perturbația externă ar fi fost aplicată acestei bile și nu primei bile din lanț. De reținut că aceste afirmații au sens dacă frecarea este suficient de mică, adică dacă mediul de propagare a undei este slab disipativ (pierderile de energie sînt foarte mici). Mai mult, se presupune că forțele interne care apar la transmiterea perturbației sînt numai forțe elastice. (Astfel de medii de propagare se numesc medii elastice iar undele care apar în astfel de medii sînt unde elastice.)

„Punctul" în care se aplică perturbația externă se mai numește sursă sau centru de oscilație, deoarece de cele mai multe ori perturbațiile au o formă oscilantă și sînt aplicate în regiuni restrînse ale mediului, destul de mici față de dimensiunile mediului perturbat.

Constatarea făcută mai sus, în ceea ce privește propagarea perturbației, poate fi exprimată astfel:

punctul unde a ajuns unda la un moment dat poate fi considerat centru de oscilație în locul celui inițial.

Această propoziție constituie un caz particular a unei legi de propagare specifică mediilor elastice, denumită *principiul lui Huygens.*

10.3.3. **Vectorul de oscilație.** Să presupunem că perturbația inițială nu mai are loc în lungul lanțului bile-resorturi ci pe o direcție oarecare (fig. 10.19). Să considerăm un anumit moment al mișcării t și o anumită bilă n din lanț. În acel moment bila n este deplasată față de poziția ei de echilibru. Să atașăm bilei n un vector $\vec{u}$ care are originea în poziția de echilibru a bilei n, mărimea egală cu depărtarea bilei față de poziția inițială la momentul respectiv, direcția dată de dreapta care unește cele două poziții și vîrful în locul unde se află bila în momentul considerat. Acest vector se numește *vector de oscilație*. Valoarea sa la un moment dat poartă numele de elongație, iar elongația maximă se numește amplitudine. Dacă sînt cunoscuți vectorii de oscilație ai tuturor bilelor la orice moment atunci spunem că este cunoscută unda elastică respectivă.

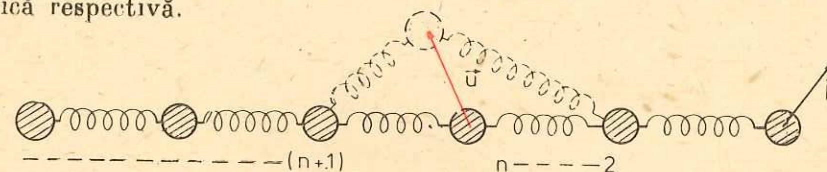


Fig. 10.19. Lanț de bile-resorturi prin care se transmite o perturbație pe o direcție oarecare.

Observăm că vectorul de oscilaţie $\vec{u}$ este dependent de timp iar pentru acelaşi moment el diferă de la o bilă la alta adică depinde de depărtarea faţă de poziţia de echilibru a fiecărei bile.

Să analizăm un caz real. Vom presupune deci că avem un (corp) mediu prin care se propagă o undă iniţiată de o anumită perturbaţie externă. Ca oricare altul, mediul material considerat este format din microparticule (atomi, molecule). Aceste particule se vor comporta asemenea bilelor din lanţul de resorturi, între ele exercitîndu-se forţe care pot fi asimilate cu tensiunile — forţele elastice, din resort. Sînt însă şi deosebiri mari: *a)* în primul rînd particulele unui mediu real formează o structură spaţială şi nu una liniară ca modelul lanţ de resorturi-bile; *b)* în al doilea rînd forţele dintre ele pot să nu fie elastice, adică nu sînt proporţionale cu depărtarea faţă de poziţia de echilibru. Aceste deosebiri, cu toate că sînt importante, nu duc la rezultate mult diferite de cele care se obţin cu modelul lanţ (liniar) de resorturi-bile.

De precizat că, în cazul real, nu fiecare particulă oscilează separat; se întîmplă,în cazul unor unde,ca grupuri întregi de particule să se mişte la fel şi deci să joace împreună rolul unei bile-particule din lanţ.

10.4. UNDE TRANSVERSALE. UNDE LONGITUDINALE VITEZA DE PROPAGARE

10.4.1. **Tipuri de unde.** Să considerăm, faţă de un sistem de referinţă triortogonal $Oxyz$, poziţia de echilibru a unui grup de particule din mediu, care se mişcă la fel (fig. 10.20). Grupul de particule care oscilează la fel ocupă un anumit volum pe care-l considerăm mic în raport cu dimensiunile mediului. Fiind foarte mic, este puţin importantă forma acestui volum şi de aceea

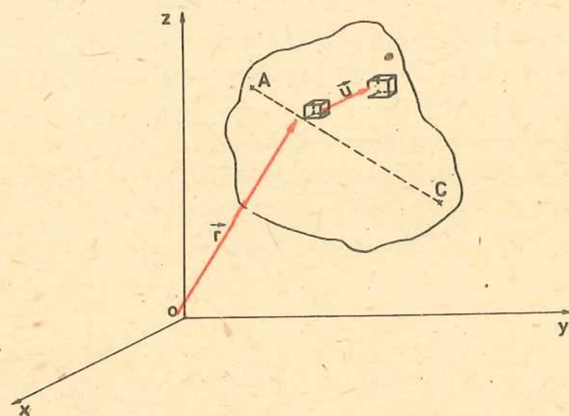


Fig. 10.20. Transmiterea unei perturbaţii pentru un grup de particule identice. Vectorul $\vec{u}$ este vectorul de oscilaţie.

îl putem considera de formă paralelipipedică. Poziţia faţă de sistemul de referinţă $Oxyz$ se fixează cu ajutorul vectorului de poziţie $\vec{r}$ al centrului acestui mic paralelipiped.

Sub acţiunea undei, grupul de particule se va deplasa din poziţia iniţială într-altă poziţie. Vectorul de oscilaţie uneşte centrele celor două paralelipipede aşa cum arată şi figura 10.20. Mărimea şi orientarea acestui vector depind de timp şi de poziţia de echilibru a grupului de particule. Putem scrie deci $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$. Să considerăm un centru de oscilaţie C în care s-a aplicat o perturbaţie externă. După un timp ea s-a transmis pînă în punctul A. Dreapta CA se numeşte direcţie de propagare sau rază de undă, deoarece mişcarea se transmite, se propagă, în mediul considerat după direcţiile unor „raze" care pleacă din C. Pe o astfel de direcţie lucrurile se petrec asemănător cu cele analizate la modelul lanţ de resorturi şi bile.

Distingem două cazuri particulare importante:

a) este posibil ca vectorul de oscilaţie, variabil în timp să fie mereu şi pentru orice particulă perpendicular pe direcţia de propagare;

b) vectorul de oscilaţie să aibă direcţia identică cu direcţia de propagare.

În primul caz *unda este transversală*, iar în celălalt *unda este longitudinală*.

Din nou trebuie precizat că o undă nu apare într-un mediu real decît dacă între componentele acestuia se exercită interacţiuni. Astfel, undele transversale nu se pot produce decît în medii în care se manifestă interacţiuni perpendiculare pe direcţia de propagare, forţe de forfecare (de torsiune). Să luăm de exemplu fluidele, acestea sînt caracterizate prin proprietatea de curgere, adică particulele constituente nu interacţionează prin forţe perpendiculare pe dreptele care unesc centrele particulelor între ele, ci numai prin forţe de-a lungul acestor drepte. Aşadar, o deformare de forfecare nu se poate propaga prin fluide pentru că nu există forţe de revenire, forţe elastice, care să readucă particulele în poziţiile lor iniţiale. Prin fluide se pot propaga numai deformările (comprimările) de-a lungul razelor de undă, situaţie în care vectorii de oscilaţie sînt paraleli cu direcţia de propagare, adică se pot propaga numai unde longitudinale.

În (corpurile) mediile solide se manifestă forţe în toate direcţiile şi deci în aceste medii undele pot fi atît transversale cît şi longitudinale.

10.4.2. **Lungime de undă. Viteză de propagare.** Să reluăm analiza modelului iniţial. Presupunem că perturbaţia externă este periodică, cum se şi întîmplă în realitate de multe ori. Astfel, după un timp T egal cu o perioadă, bila *1* s-ar putea afla exact în situaţia dinaintea aplicării perturbaţiei. Să notăm cu m bila pînă la care a ajuns unda la momentul $t = T$. Atunci bilele m şi *1* se află în aceeaşi situaţie şi se vor mişca la fel, adică vectorii lor de oscilaţie vor fi egali la orice moment ulterior, $\vec{u}_m = \vec{u}_1$. Se spune că bilele *1* şi m oscilează în fază, sînt în concordanţă de fază. Punctele, particulele, care oscilează la fel într-un mediu prin care se propagă o undă se numesc puncte de egală fază. Aceste puncte se dispun pe suprafeţe închise în jurul centrului de

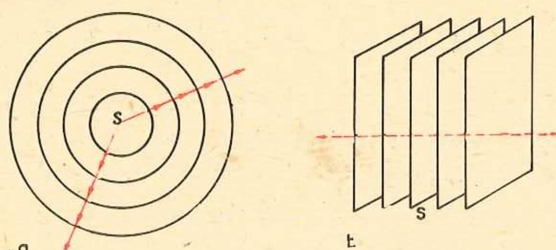


Fig. 10.21. *a)* Unde sferice *b)* unde plane.

oscilație, numite suprafețe de egală fază sau suprafețe de undă. Se poate demonstra că razele de undă sînt perpendiculare pe suprafețele de egală fază.

Forma suprafeței de undă depinde atît de proprietățile mediului cît și de forma sursei. În mediile omogene și izotrope, dacă sursa de oscilație este punctiformă sau sferică, suprafața de undă, deci și frontul de undă, sînt sfere concentrice. Undele care se formează în acest caz se numesc *unde sferice* (fig. 10.21, *a*).

Cînd sursa de oscilație este o suprafață plană atunci unda care se transmite este o *undă plană* (fig. 10.21, *b*).

La distanțe mari de sursa de perturbație o undă sferică poate fi considerată, într-o regiune mică a mediului, ca o undă plană, pe regiuni restrînse asimilîndu-se suprafața sferei de rază mare cu o suprafață plană.

Să aplicăm acum principiul lui Huygens: dacă bila m oscilează la fel ca bila 1 putem considera că unda care se propagă de la bila m la bilele $(m+1)$, $(m+2)$ etc. își are centrul de oscilație în bila m. Cum toate bilele din lanț sînt identice și lanțul este suficient de lung rezultă că prima bilă care va oscila exact la fel ca bila m va fi cea cu numărul $2m$ ş.a.m.d. Așadar bilele $1m$, $2m$, $3m$, ... vor fi bile care oscilează în fază. Același raționament se poate aplica oricărei particule-bile k $(1 < k < m)$. Concluzia este că, pe o rază de undă, punctele care oscilează în fază sînt egal depărtate.

Distanța dintre două puncte vecine (succesive) de egală fază se numește lungime de undă și se notează cu λ.

În general, lungimea de undă nu este aceeași pentru toate razele de undă, pentru orice direcție de propagare din mediul respectiv. Mediile (corpurile) în care lungimea de undă nu depinde de direcția de propagare se numesc medii izotrope.

Cu ce viteză se deplasează o undă, frontul undei, într-un mediu elastic?

În timp de o perioadă T unda parcurge distanța dintre două puncte de egală fază, situate pe aceeași direcție de propagare, adică distanța λ și deci putem scrie

$$v_f = \frac{\lambda}{T} \qquad (10.23)$$

unde v_f se numește *viteza de fază*, viteza de propagare a frontului de undă, a fazei.

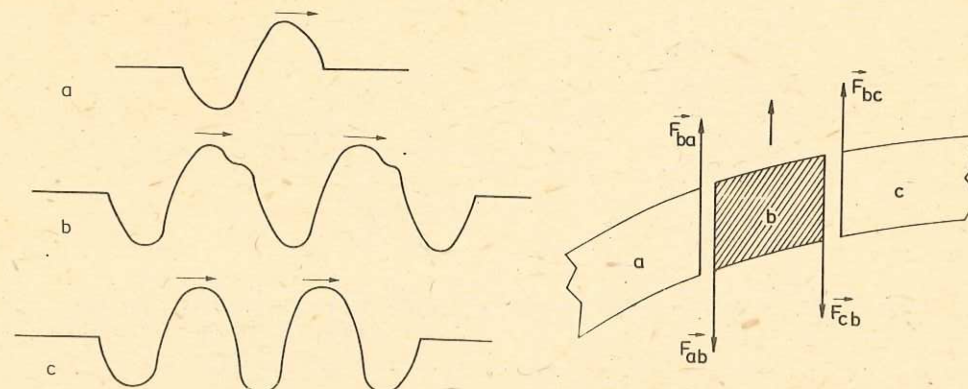


Fig. 10.22. Undă transversală pe un cablu (*a*). Tren de unde transversale (*b*) și (*c*).

Fig. 10.23. Unda transversală presupune deformări de forfecare.

10.4.3. Unde transversale

EXPERIMENT

a) Un cablu de cauciuc (o coardă, un resort elastic) este lovit lateral. Se observă că propagarea acestei perturbații se face prin deformări perpendiculare pe direcția de transmitere a mișcării (fig. 10.22, *a*). O astfel de undă este un exemplu de undă transversală.

Dacă se produce o perturbație exterioară la intervale egale de timp sau este produsă o oscilație armonică, atunci pe cablu sau pe coardă se vor transmite perturbații succesive. Acest grup de perturbații formează un tren de unde (fig. 10.22, *b* și *c*).

Producerea undelor transversale într-un cablu, o coardă, un resort etc. este posibilă datorită faptului că orice parte a mediului solid poate antrena în mișcarea sa părțile învecinate, provocînd solicitări de forfecare (fig. 10.23). În figură sînt prezentate trei părți vecine antrenate în propagarea perturbației. Mișcarea părții b (din mijloc) nu se poate face fără antrenarea părților a (forța $\vec{F}_{ba}$) și c (forța $\vec{F}_{bc}$) care se opun prin forțele $\vec{F}_{ab}$ respectiv $\vec{F}_{cb}$. Aceste legături asigură cuplajul părților a, b, c și determină apariția deformărilor elastice și deci a forțelor elastice de revenire. Evident numai în corpurile solide pot apărea deformări elastice de acest fel pe cînd în fluide nu. Așadar undele transversale pot apărea numai în mediile (corpurile) solide.

Dacă sursa de oscilație produce oscilații într-un plan oarecare, atunci orice punct de pe direcția de propagare oscilează în planul inițial (planul de oscilație al sursei). Deplasînd de-a lungul corzii (cablului), în planul de oscilație al sursei, o fantă, vom constata că ea nu împiedică transmiterea perturbației (fig. 10.24). Se spune că undele transversale sînt *unde polarizate*.

b) Un model de mediu în care se propagă o undă transversală îl reprezintă bilele suspendate, reprezentate în figura 10.25 care pot fi asimilate

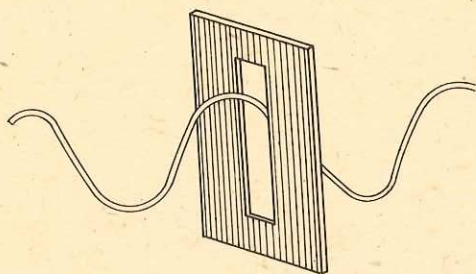


Fig. 10.24. Undă transversală plan polarizată.

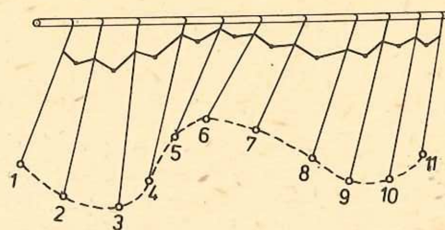


Fig. 10.25. Propagarea unei oscilații armonice pe un lanț de pendule gravitaționale.

drept pendule gravitaționale. Lanțul de pendule cuplate modelează un mediu omogen și izotrop.

Dacă punem în mișcare de oscilație un pendul din capătul lanțului, de exemplu pendulul *1*, printr-un impuls transmis perpendicular pe direcția lanțului de pendule, datorită cuplajului, energia se transmite de la pendulul *1* în lanțul de oscilatori. Pentru mediul format din lanțul de pendule, excitarea pendulului *1* constituie o perturbație și acest pendul poate fi considerat drept o sursă de oscilație. Menținînd mișcarea sursei, se constată că mișcarea celorlalți oscilatori continuă. Fiecare oscilator execută oscilații forțate cu frecvența impusă de frecvența sursei. Evident, procesul de propagare are loc în timp. Dacă măsurăm timpul necesar ca o perturbație să ajungă la un pendul oarecare din lanț, vom observa că acesta depinde de distanța dintre sursa de oscilație și pendulul considerat. Fiecare pendul intră în stare de oscilație mai tîrziu decît cel precedent. Faza mișcării fiecărui pendul diferă de a celui precedent și de a celui care urmează. Pentru că toți oscilatorii sînt identici și cuplajele sînt de același fel, viteza de propagare a oscilației este constantă, în absența forțelor disipative (forța de frecare). Cît timp viteza de propagare, viteza fazei sau viteza de fază rămîne constantă, distanța dintre doi oscilatori consecutivi, care oscilează în fază (*1* și *9*; *2* și *10*, figura 10.25) este constantă. Această distanță reprezintă chiar lungimea de undă, fapt ce justifică afirmația că această mărime este caracteristică unei unde cînd propagarea are loc într-un mediu izotrop și omogen.

Din relația (10.23) și din descrierea procesului de propagare, rezultă că lungimea de undă este determinată de doi factori: unul care depinde de sursă (perioada sau pulsația sursei) și al doilea (viteza de fază) care depinde de mediul de propagare, de proprietățile lui elastice, adică de cuplajul dintre particulele mediului.

Se demonstrează că viteza v_t de propagare a unei unde transversale pe o coardă depinde de tensiunea T_m la care este solicitată coarda și de masa μ a unității de lungime a corzii:

$$v_t = \sqrt{\frac{T_m}{\mu}}.$$

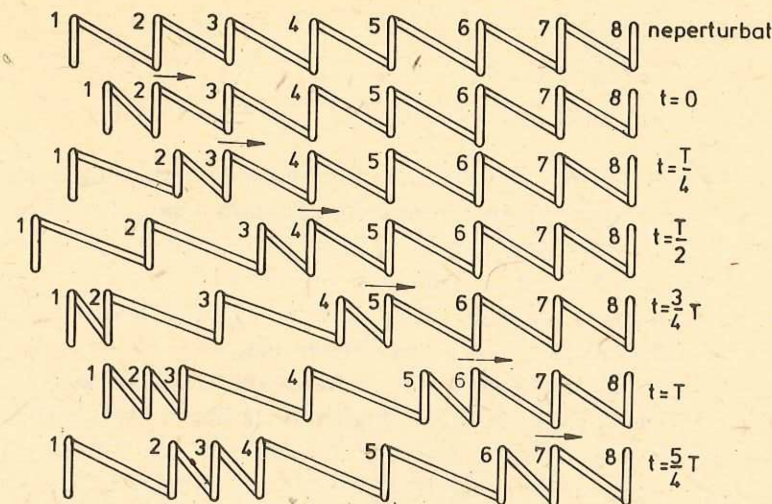


Fig. 10.26. Undă longitudinală într-un resort elastic.

Dacă oscilațiile sursei nu sînt întreținute, amortizarea este foarte rapidă, energia sursei fiind transferată lanțului de oscilatori și disipată prin frecări. Unda se stinge foarte repede.

10.4.4. Unde longitudinale. Să considerăm un resort de oțel cu spirele în repaus și echidistanțate (fig. 10.26.) Resortul îl putem lua drept un șir — lanț de spire (oscilatori) cuplate elastic, fiecare spiră putînd oscila de-a lungul axei sale în jurul unei poziții de echilibru. Provocăm o perturbație a resortului, trăgînd de o spiră în lungul axei resortului și lăsînd-o după aceea liberă. Perturbația se propagă în resort în lungul axului său prin punerea în starea de oscilație a fiecărei spire. Unda care a apărut în resort, în acest caz, se numește undă longitudinală. Datorită frecărilor cu aerul și îndeosebi datorită frecărilor interne din materialul spirei, oscilațiile lor se sting, resortul atingînd destul de repede starea de repaus.

Dacă prima spiră va fi pusă în mișcare, pe o cale oarecare și dacă această mișcare este oscilatorie armonică, atunci și spirele următoare vor descrie o mișcare asemănătoare după trecerea perturbației inițiale. Figura 10.26 surprinde resortul parcurs de o undă longitudinală, la diferite momente exprimate în fracțiuni din perioada oscilației armonice a sursei de oscilație (spira *1*). Se observă că în timp ce comprimarea avansează spre dreapta, fiecare spiră care intră în mișcare continuă să oscileze în jurul poziției de echilibru. De exemplu spira *1* face o oscilație completă între $t = 0$ și $t = T$, cînd apare o nouă comprimare care se va transmite în lungul resortului. Există spire care oscilează în concordanță de fază cum sînt, de exemplu, spirele *1* și *5*, *2* și *6*.

Considerînd resortul un mediu omogen și izotrop, propagarea perturbației se va face de-a lungul resortului cu aceeași viteză v. În timp de o perioadă T

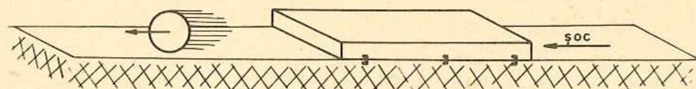


Fig. 10.27. Undă longitudinală într-un corp solid.

în care spira *1*, de exemplu, descrie o oscilaţie completă, distanţa parcursă de perturbaţie este vT. Perturbaţia a ajuns pînă la spira *5* care începe să oscileze în fază cu spira *1*. Distanţa dintre două spire consecutive (*1* şi *5*, *2* şi *6*) care oscilează în fază este lungimea de undă şi constituie o caracteristică a undei respective. Unda longitudinală nu este polarizată ca unda transversală. Acest lucru se poate demonstra pe cale experimentală.

Undele longitudinale se pot forma atît în mediile solide cît şi în cele fluide (lichide şi gaze). Un exemplu de undă longitudinală într-un solid este transmiterea perturbaţiei produsă de o lovitură de ciocan la capătul unei bare, în lungul acesteia. Acest lucru poate fi verificat, dacă la celălalt capăt al barei se alătură o bilă de bara fixată rigid. Cînd perturbaţia va ajunge la capătul barei, bila este proiectată pe direcţia barei în sensul propagării perturbaţiei (fig. 10.27).

Ca şi în cazul undelor transversale, viteza de propagare a undelor longitudinale depinde de caracteristicile mediului de propagare. Se demonstrează că viteza v_l a unei unde longitudinale este

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate iar ρ densitatea mediului de propagare.

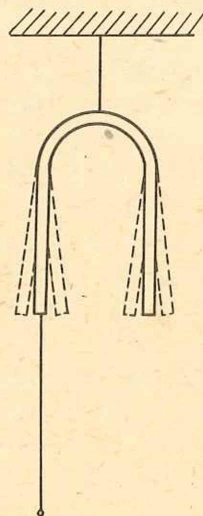


Fig. 10.28. Pentru exerciţiul 1.

PROBLEME REZOLVATE

1. La capătul unei ramuri a unui diapazon (fig. 10.28), se leagă un fir de lungime $l = 2$ m şi masă $m = 12$ g. De fir se suspendă un corp cu masa $m_1 = 960$ g. Diapazonul oscilează. Să se calculeze: *a)* viteza de propagare a undelor în fir; *b)* frecvenţa de oscilaţie a diapazonului, dacă lungimea de undă este de 40 cm. *c)* Cum se schimbă viteza de propagare a undei, dacă se dublează masa corpului suspendat?

Rezolvare: *a)* În fir se propagă unde transversale. Neglijînd efectul masei firului asupra tensiunii din fir avem:

$$T = G_1 = m_1 g \text{ şi deci } v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\frac{m}{l}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{960 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 2\ \text{m}}{12 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}} = 40\ \text{m/s}.$$

b) Fiecare punct de pe fir oscilează forţat cu frecvenţa impusă de oscilaţiile diapazonului. Din $\lambda = vT$ şi $\nu T = 1$ avem:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{40\ \text{m/s}}{40 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 10^2\ \text{s}^{-1} = 10^2\ \text{Hz}.$$

c) Masa corpului suspendat este acum $m_1' = 2m_1$ şi viteza de propagare a undei transversale va fi $v_t' = \sqrt{\frac{T'}{\mu}}$. Raportul vitezelor de propagare este:

$$\frac{v_t'}{v_t} = \sqrt{\frac{T'}{T}} = \sqrt{\frac{m_1'}{m_1}} = \sqrt{2}.$$

2. Un muncitor de la calea ferată loveşte cu ciocanul capătul unei şine. Sunetul transmis prin şină este auzit după 0,20 s de un al doilea muncitor care ascultă cu urechea pe şină. Se cere să se determine distanţa dintre cei doi muncitori ştiind că şina este din oţel cu $\rho = 7\,800$ kg/m³ şi modulul de elasticitate este $E = 20 \cdot 10^{10}$ N/m².

Rezolvare. Dacă se cunoaşte viteza v_l de propagare a perturbaţiei pe care o vom considera că se transmite sub forma unei unde longitudinale atunci distanţa poate fi determinată din relaţia $d = v_l t$:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{10}\ \text{N/m}^2}{78\,000\ \text{kg/m}^3}} = 5{,}06 \cdot 10^3\ \text{m/s}.$$

$$d = v_l t = 5{,}06 \cdot 10^3\ \text{m/s} \cdot 20 \cdot 10^{-2}\ \text{s} = 1\,012\ \text{m}.$$

10.4.5. **Intensitatea undei.** Să considerăm, într-un mediu elastic omogen şi izotrop, o sursă de oscilaţie care transferă continuu aceeaşi energie în unitate de timp. Sursa are, deci, o putere constantă. Dacă E este energia emisă în timpul t de mulţimea punctelor ce alcătuiesc sursa atunci relaţia

$$P = \frac{E}{t} = \Phi \tag{10.24}$$

defineşte *puterea emisă de sursă* sau fluxul de energie emis, mărime măsurată în watt. Energia emisă de sursă este transferată în întreg mediul. Raportul dintre fluxul de energie P şi aria S a unei suprafeţe perpendiculare pe direcţia de propagare prin care are loc transferul de energie

$$I = \frac{P}{S} \tag{10.25}$$

defineşte densitatea de flux de energie sau *intensitatea* I a undei, mărime care în S.I. se măsoară în W/m².

Deoarece energia transferată printr-o porţiune a unei suprafeţe de undă este suma energiilor tuturor oscilatorilor de pe această suprafaţă de undă şi pentru că energia unui oscilator armonic este proporţională cu A^2 (pătratul amplitudinii) rezultă că densitatea fluxului de energie este direct proporţională cu pătratul amplitudinii oscilatorilor de pe această suprafaţă de undă

$$I \sim A^2. \tag{10.26}$$

Observaţie importantă!

Proprietatea cea mai importantă a unei unde este aceea de a transfera „energie". Transportul de „energie" are loc fără transport de substanţă!

10.5. ECUAȚIA UNDEI PLANE

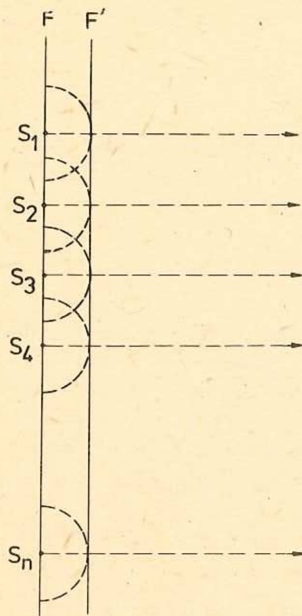


Fig. 10.29. Undă plană generată de mai multe surse de oscilație situate în același plan.

Ne propunem să stabilim care este expresia funcției $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ pentru un caz concret: unda plană.

Știm că acest tip de undă se caracterizează prin faptul că suprafețele de egală fază sînt plane, adică sînt suprafețe care se închid la infinit. Avem de-a face, evident, cu o idealizare. O suprafață de egală fază poate fi considerată plană pe o porțiune mică, dacă este mult depărtată de sursa de oscilație. Se mai pot obține însă unde plane și altfel, anume folosind un număr mare de surse de oscilație dispuse pe un plan și care sînt în fază. Undele produse de aceste centre, separat, se compun și rezultatul este o undă plană (fig. 10.29).

Indiferent de modul de obținere, undele plane sînt caracterizate de faptul că amplitudinile oscilațiilor tuturor punctelor mediului sînt aceleași. Acest fapt este o consecință a legii conservării energiei: energia unui plan de oscilatori este preluată de un plan similar (același număr de particule) și prin urmare energia repartizată unui oscilator va fi aceeași (mediul de propagare este presupus nedisipativ). Cum energia de oscilație este proporțională cu puterea a doua a amplitudinii, A^2, consecința apare evidentă.

Să reluăm în discuție modelul lanț de resorturi și bile. Acest model este suficient pentru studiul undei plane întrucît ne putem imagina o mulțime de lanțuri avînd bilele în plane paralele între ele și perpendiculare pe resorturi. Dacă toate lanțurile sînt perturbate simultan și identic, vom obține o undă plană care se propagă prin sistemul lor. Cum fiecare lanț se comportă la fel ca celelalte este suficient să studiem numai unul, pentru a obține informații despre întreg sistemul.

Vom presupune că perturbația externă este armonică, adică elongația bilei *1* va fi o funcție de forma $u_1 = A \sin \omega t$. Oscilațiile sînt presupuse paralele sau perpendiculare pe lanț. Pulsația perturbației se presupune a fi egală cu pulsațiile proprii ale bilelor; se presupune deci existența unui cuplaj strîns, a unui transfer optim de energie.

Cum depinde elongația unei bile oarecare n din lanț de timpul de propagare de la sursa de oscilație și de distanța față de sursă?

Bila n va intra în oscilație mai tîrziu decît bila *1* și deci între cele două bile va exista un defazaj φ. Cum forțele care acționează asupra bilei n sînt

forțe elastice, oscilația sa va fi tot armonică și, unda fiind plană, amplitudinea va fi aceeași. Deci elongația bilei n va fi de forma:

$$u = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right). \qquad (10.27)$$

Defazajul dintre cele două bile se datorează intrării mai tîrziu în oscilație a bilei n față de bila *1*, adică timpului τ necesar undei să parcurgă distanța x de la bila *1* la bila n : $\tau = \frac{x}{v_f}$. Deci putem scrie acum

$$u = A \sin \omega(t - \tau). \qquad (10.28)$$

Așadar bila n începe să oscileze cu o întîrziere τ față de bila *1* (momentul inițial fiind acela în care este aplicată perturbația). Adică, la momentul t, bila n are aceeași elongație pe care o avea bila *1* la momentul $(t - \tau)$, deci mai devreme. Înlocuind pe τ rezultă

$$u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_f}\right) = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{v_f}\right)$$

dar cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$ și $v_f = \frac{\lambda}{T}$ rezultă:

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \qquad (10.29)$$

Relația (10.29) reprezintă așa-numita *ecuație a undei plane* sau legea de mișcare a undei.

Observație. Dacă m este un număr întreg, păstrînd x constant și punînd în loc de $t \to t + mT$ rezultă:

$$u(t + mT, x) = A \sin 2\pi \left(\frac{t + mT}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + m - \frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi m\right] = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = u(t, x),$$

adică funcția are perioada T.

Păstrînd t constant avem $u(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$$u(x + m\lambda, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + m\lambda}{\lambda}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - m\right) =$$

$$= A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi m\right] = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = u(x, t).$$

Rezultă că: $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ este periodică atît în timp (cu perioada T) cît și în spațiu (cu perioada λ). În acest fel unda trebuie concepută în două privințe ca un proces periodic. Perioada temporală este perioada de oscilație T, „perioada" spațială este lungimea de undă λ.

O undă este un fenomen periodic în timp şi spaţiu.

Relaţia (10.29) ne permite să exprimăm defazajul dintre doi oscilatori aflaţi la distanţa x_1 respectiv x_2 de o sursă de oscilaţie, pe aceeaşi rază de undă, la acelaşi moment t. Într-adevăr dacă

$$u_1 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right) \text{ şi } u_2 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)$$

reprezintă elongaţiile celor doi oscilatori, atunci defazajul este:

$$\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=\frac{2\pi}{\lambda}(x_1-x_2).$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \qquad (10.30)$$

Dacă Δx, diferenţa de drum dintre cei doi oscilatori, respectiv dintre suprafeţele de undă cărora aparţin, este de forma $2k\frac{\lambda}{2}$, $\left(\text{un număr par de }\frac{\lambda}{2}\right)$, atunci $\Delta\varphi$, defazajul, este $2k\pi$ şi cei doi oscilatori, suprafeţele lor de undă, sînt în fază.

În cazul în care $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, $\left(\text{număr impar de }\frac{\lambda}{2}\right)$, atunci defazajul $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ şi cei doi oscilatori sînt în opoziţie de fază.

Exerciţiu. O sursă de unde plane oscilează după ecuaţia $u = 3\cdot 10^{-1}\sin\frac{\pi}{9}t$. Dacă viteza de propagare a undelor este de 2 m/s: *a)* să se scrie ecuaţia undei; *b)* să se afle diferenţa de fază între oscilaţiile a două puncte M şi N aflate la distanţa de 3 m respectiv de 4 m de sursă.

Rezolvare. a) Ecuaţia undei plane este

$$u = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right).$$

Comparînd legea de oscilaţie a sursei cu relaţia $u = A\sin(\omega t+\varphi)$ observăm că $\omega = \frac{\pi}{9}$ rad/s, de unde $T = \frac{2\pi}{\omega} = 18$ s, ceea ce permite calcularea lungimii de undă: $\lambda = vT = 2$ m/s $\cdot$ 18 s $= 36$ m. Putem scrie acum ecuaţia undei plane:

$$u = 3\cdot 10^{-1}\sin 2\pi\left(\frac{t}{18}-\frac{x}{36}\right).$$

b) Punctele M şi N oscilează după legile

$u_M = 3\cdot 10^{-1}\sin 2\pi\left(\frac{t}{18}-\frac{3}{36}\right)$, $u_N = 3\cdot 10^{-1}\sin 2\pi\left(\frac{t}{18}-\frac{4}{36}\right)$, diferenţa de fază este deci $\varphi_1-\varphi_2 = \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{18}-\frac{3}{36}\right)-2\pi\left(\frac{t}{18}-\frac{4}{36}\right)=\frac{\pi}{18}$ rad.

10.6. CLASIFICAREA UNDELOR ELASTICE DUPĂ FRECVENŢĂ

Am reţinut din paragrafele anterioare că undele care se formează în mediile elastice se numesc unde elastice. Considerînd că izvorul de perturbaţie este un oscilator armonic, adică un oscilator sinusoidal, atunci şi undele care se transmit în mediile elastice sînt sinusoidale. Dacă astfel de unde provin de la izvoare de oscilaţie, a căror frecvenţă este cuprinsă în intervalul 16 Hz — 20 000 Hz, deci care pot produce senzaţia de sunet, ele se numesc unde sonore sau *sunete*. Oscilaţiile, respectiv undele, a căror frecvenţă este situată între 20 k Hz şi 100 GHz se numesc *ultrasunete*, iar cele cu frecvenţe sub 16 Hz *infrasunete*.

În ultimii ani au început studii sistematice asupra producerii, propagării şi absorbţiei infrasunetelor datorită constatării că acestea au o mare influenţă asupra organismelor vii. Această influenţă se datoreşte faptului că ritmurile specifice organismelor vii se produc cu frecvenţe infrasonore şi deci transferul de energie dintre un infrasunet şi un organism viu devine important (la rezonanţă).

O categorie aparte de unde elastice o constituie undele seismice. La adîncimi de ordinul sutelor de kilometri în interiorul globului pămîntesc, se acumulează,în timp, tensiuni foarte mari datorită cărora se produc brusc rupturi şi deplasări care se resimt sub forma unor perturbaţii violente, numite cutremure. Regiunea din interiorul Pămîntului în care se produce mişcarea se numeşte focar sau hipocentru, iar locul de la suprafaţă aflat pe verticala locului se numeşte epicentru. Mediul alcătuit din roci cu proprietăţi elastice însemnate face posibilă transmiterea perturbaţiei sub forma unei unde, unda seismică. Unda seismică constă din: unda seismică transversală şi unda seismică longitudinală. Frecvenţa undelor seismice este cuprinsă în intervalul 10—25 Hz.

10.7. CONDIŢII DE AUDIBILITATE A OSCILAŢIILOR ELASTICE

Senzaţia de sunet se datoreşte punerii în vibraţie, în anumite condiţii, a terminaţiilor nervului auditiv, prin intermediul diferitelor organe ale urechii.

Pentru a fi percepute ca sunete, oscilaţiile din mediile elastice (apă, aer, lemn sau oţel) care ajung la ureche, trebuie să îndeplinească anumite condiţii de frecvenţă şi de intensitate.

Ştim că frecvenţele oscilaţiilor sonore (sunetele) sînt cuprinse între 16 Hz şi 20 000 Hz. Aceste limite sînt diferite de la individ la individ, în mod deosebit limita superioară (care pentru acelaşi individ scade cu vîrsta).

În ceea ce priveşte intensitatea sunetului ea trebuie să fie cuprinsă, de asemenea, între anumite limite. Spre intensităţile slabe există un prag sub care sunetele nu mai pot fi percepute, $I_{min} = 10^{-12}$ W/m² (la $\nu = 1$ kHz), iar spre intensităţile mari există o limită peste care senzaţia auditivă se

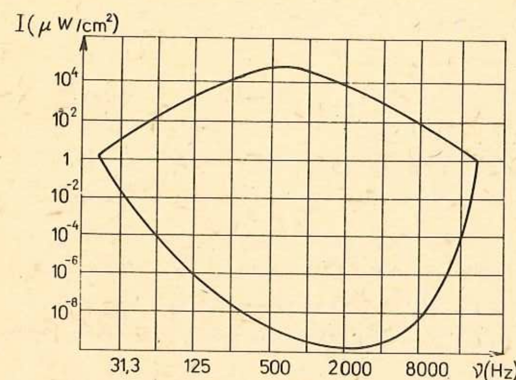


Fig. 10.30. Limitele de audibilitate.

transformă în senzație de durere, $I_s = 10^2$ W/m² (la $\nu = 1$ kHz). În figura 10.30 s-au trasat, aproximativ, limitele inferioară și superioară de intensitate audibilă pentru diferite frecvențe. Se poate observa că lărgimea suprafeței intensităților audibile variază cu frecvența, îngustîndu-se spre frecvențe foarte joase și foarte înalte, atingînd valoarea cea mai mare în jurul frecvenței $\nu = 1\,000$ Hz.

În afară de limitele de frecvență și de intensitate se mai impune undelor sonore și o limită de durată. Pentru ca o oscilație elastică, care se află între limitele audibile de frecvență și intensitate, să poată fi percepută ca sunet, ea trebuie să dureze un timp minim. Pentru un observator standard (mediu) această durată este de cel puțin $\frac{1}{100}$ s. Dacă timpul este mai mic decît cel limită, oscilația elastică este percepută sub formă de pocnet.

10.8. REFLEXIA ȘI REFRACȚIA UNDELOR

10.8.1. **Undă reflectată, undă refractată.** Să presupunem că avem două medii în contact adică, pe o anumită suprafață, particulele unuia dintre ele interacționează cu particulele celuilalt. Să notăm cele două medii cu A și B și să presupunem că prin mediul A se propagă o undă către suprafața de separare (a, b) (fig. 10.31). În momentul în care unda ajunge la particulele de mediul A, situate pe suprafața (a, b), acestea încep să oscileze. Cum particulele mediului B, aflate pe suprafața de contact, sînt în interacțiune cu cele

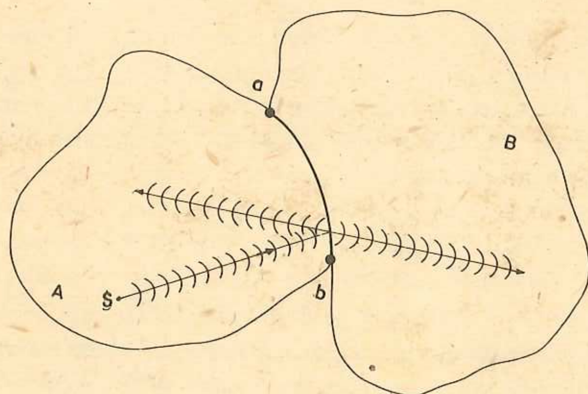


Fig. 10.31. Reflexia și refracția unei unde elastice.

ale mediului A, rezultă că oscilațiile se vor transmite mai departe în mediul B și odată cu ele și o parte din energia inițială.

Oscilatorii din mediul A, de pe suprafața de separare (a, b), după ce au pus în stare de oscilație particulele mediului B, vor continua să oscileze însă cu amplitudini mai mici. Acești oscilatori devin surse pentru o undă care se va propaga tot prin mediul A, dar care va fi diferită de cea inițială. (Energia transportată de această nouă undă va fi diferența dintre energia inițială și energia transferată mediului B.)

Unda care ia naștere în mediul B se numește undă transmisă sau *undă refractată*, iar cea care se formează în mediul A, *undă reflectată*.

Cum se propagă cele două unde? Cum se pot determina noile direcții de propagare?

Principiul lui Huygens enunțat, acum, pentru cazul general ne va ajuta să obținem răspuns la întrebările puse.

Fie o undă care se propagă printr-un mediu; dacă la un anumit moment t se înlocuiește frontul ei de undă cu o mulțime de oscilatori, ce constituie fiecare o sursă pentru cîte o undă sferică (undă secundară sau elementară) care se propagă înainte, atunci frontul undei principale la un moment ulterior $t + \Delta t$ *este suprafața tangentă (înfășurătoarea) la fronturile undelor elementare (la momentul* Δt *de la generarea lor).*

O altă formulare a principiului lui Huygens este următoarea:

Orice punct de pe o suprafață de undă poate fi considerat ca un nou centru de perturbație de la care se propagă înainte unde sferice secundare (elementare).

Figura 10.32, *a* și *b* ilustrează construirea frontului de undă cu ajutorul principiului lui Huygens: *a)* pentru unde circulare și *b)* pentru unde liniare.

Se poate ilustra principiul lui Huygens prin undele superficiale de la suprafața unui lichid, folosind aparatul de produs unde (fig. 10.33, *a*). Un vibrator produce perturbația stratului superficial de apă din cuva C și generează unde circulare pe suprafața apei (fig. 10.33, *b*). Dacă așezăm pe apă un cilindru de tablă cu multe fante înguste practicate de-a lungul generatoarei

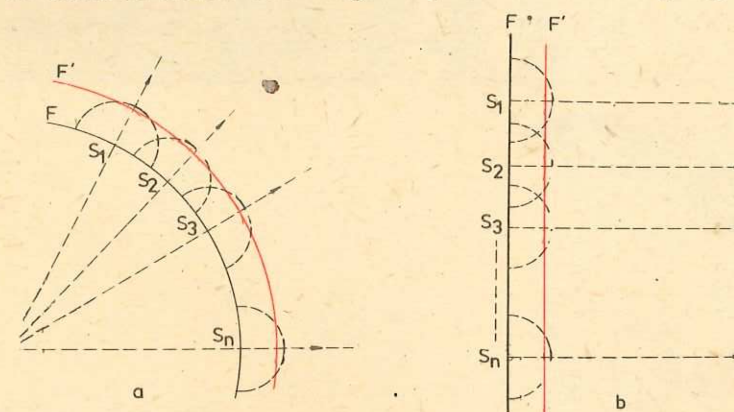


Fig. 10.32. Principiul lui Huygens. Construirea fronturilor de undă pentru unde circulare (*a*) și unde liniare (*b*).

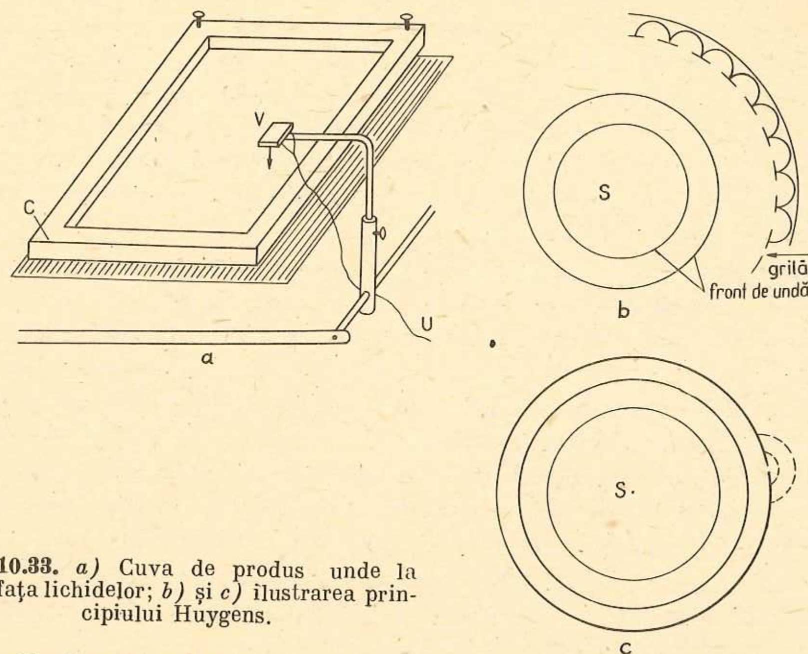


Fig. 10.33. *a)* Cuva de produs unde la suprafața lichidelor; *b)* și *c)* ilustrarea principiului Huygens.

(grila din figură) astfel încît axa lui să treacă prin centrul de oscilație, vom observa că frontul circular al undei se reface dincolo de cilindru. Dacă închidem toate fantele cu excepția uneia, vom observa unde circulare care se propagă înainte din această fantă și care se comportă ca un nou centru de oscilație (fig. 10.33, *c*).

10.8.2. **Reflexia și refracția undelor superficiale.** *a) Reflexia.* În cuva aparatului de produs unde se produc unde liniare. Așezînd un obstacol în calea undelor, se observă fenomenul de reflexie, undele emise de izvorul de oscilație revenind în mediul în care s-au propagat la incidența cu obstacolul (peretele) P care constituie un mediu cu alte caracteristici decît mediul inițial (fig. 10.34, *a*).

De observat că direcția de propagare SI a undei incidente se schimbă devenind IR (fig. 10. 34, *b*). Se construiește perpendiculara NI pe peretele P

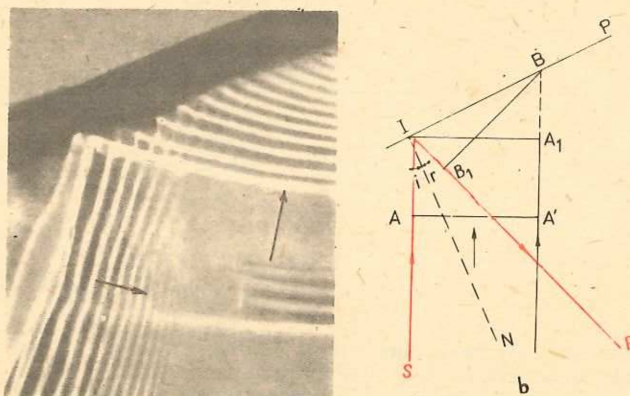


Fig. 10.34. Reflexia undelor: *a)* fotografie în cuvă; *b)* schema geometrică corespunzătoare situației din *a)*.

în punctul de incidență I. Unghiul $\widehat{SIN} = \hat{i}$ se numește *unghi de incidență* iar unghiul $\widehat{NIR} = r$ se numește *unghi de reflexie.*

b) Refracția. La același aparat, modificînd adîncimea unei părți din apă prin așezarea pe fundul cuvei a unei plăci, schimbăm caracteristicile mediului (viteza undelor în regiunea mai puțin adîncă este mai mică). Fotografia din figura 10.35, *a* arată cum se schimbă direcția undei incidente la trecerea în alt mediu. Direcția SI, după trecerea liniei care separă cele două regiuni, devine IR (fig. 10.35, *b*).

Schimbarea direcției de propagare a undei la suprafața de separare între două regiuni în care vitezele de propagare sînt diferite, o numim refracție. Unghiul r se numește unghi de refracție. Se observă, în cazul dat, că unghiul de refracție este mai mic decît unghiul de incidență.

10.8.3. **Legile reflexiei și refracției.** *a) Legea reflexiei.* Să considerăm o porțiune a frontului de undă plan AA' care avansează cu viteza v pe direcția SI către suprafața de separare P pe care o atinge la un moment dat t (fig. 10.34, *b*). La un anumit moment poziția frontului de undă este IA_1 și de la fiecare punct al frontului care va atinge suprafața P vor pleca unde elementare care conform principiului lui Huygens se vor propaga în același mediu.

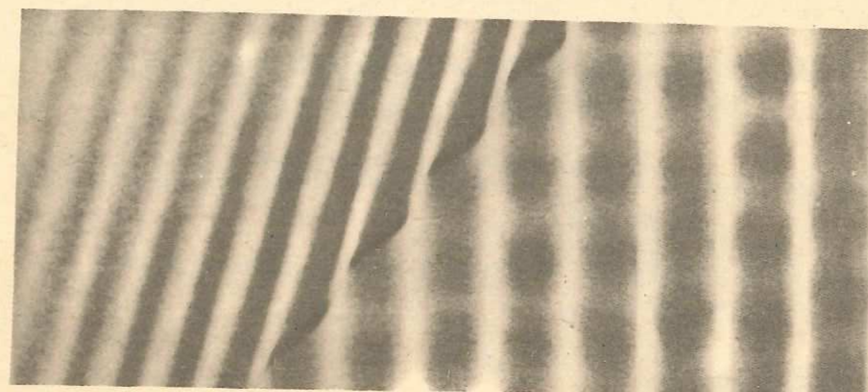


Fig. 10.35. Refracția undelor: *a)* fotografie în cuvă; *b)* schema geometrică corespunzătoare situației din *a)*.

În intervalul de timp Δt, începînd cu momentul t și sfîrșind cu momentul $(t + \Delta t)$, moment la care punctele frontului de undă IA_1 au luat contact cu peretele, undele elementare produse succesiv de toate punctele dintre I și B se propagă de la perete înapoi în mediul din care au venit. Suprafața tangentă fronturilor de undă ale tuturor acestor unde elementare (înfășurătoarea) formează noul front de undă B_1B care se deplasează pe direcția IR. Se observă că triunghiurile dreptunghice IA_1B și BB_1I sînt egale avînd IB latura comună și $A_1B = IB_1 = v\Delta t$. Rezultă că $\sphericalangle A_1IB = \sphericalangle B_1BI$ sau

$$\hat{i} = \hat{r}. \qquad (10.31)$$

Deci, la reflexie, unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.

b) Legea refracției. Porțiunea BB_1 a frontului de undă incident avansează cu viteza v_1 pe direcția SI spre suprafața de separare P pe care o atinge în B la momentul t și în I la momentul $(t + \Delta t)$ (fig. 10.35, *b*). În intervalul Δt, succesiv, din toate punctele situate între B și I, se propagă unde elementare cu viteza $v_2 \neq v_1$. Tangenta tuturor fronturilor acestor unde formează frontul undei refractate care la momentul $(t + \Delta t)$ ocupă poziția A_1I. Din triunghiurile BB_1I și BA_1I, triunghiuri dreptunghice, putem scrie:

$$\sin \widehat{B_1BI} = \frac{B_1I}{BI} = \frac{v_1 \Delta t}{BI} \text{ și } \sin \widehat{BIA_1} = \frac{BA_1}{BI} = \frac{v_2 \Delta t}{BI}.$$

Dacă facem raportul $\frac{\sin \widehat{B_1BI}}{\sin \widehat{BIA_1}}$ și observăm că: $\widehat{B_1BI} = \hat{i}$ (unghiul de incidență) iar $\widehat{BIA_1} = \hat{r}$ (unghiul de refracție) obținem legea refracției:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}. \qquad (10.32)$$

Raportul $\frac{v_1}{v_2} = n_{21}$ se numește indice de refracție al mediului *2* față de mediul *1*.

Știind că $\lambda = vT$ putem scrie: $\lambda_1 = v_1T$, respectiv $\lambda_2 = v_2T$, lungimile de undă ale undelor care se propagă în cele două medii. Relația (10.32) poate fi scrisă:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \qquad (10.33)$$

Exercițiu. Undele produse într-o cuvă cu apă trec dintr-o regiune mai puțin adîncă în una mai adîncă și se refractă. Știind că unghiul de incidență este de 19° iar cel de refracție de 30° să se afle: *a)* raportul vitezelor în cele două regiuni; *b)* raportul lungimilor de undă din cele două regiuni.

Rezolvare. a) Din legea refracției $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$ înlocuind cu datele din enunț avem: $\frac{\sin 19°}{\sin 30°} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$. *b)* Din relația (10.33) putem scrie $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2}{3}$.

10.8.4. Reflexie cu schimbare de sens

EXPERIMENT

Se produce o perturbație transversală, puternică (un șoc) pe o coardă sau pe un tub de cauciuc al cărui capăt este lăsat mobil cu ajutorul unei sfori sau inel (fig. 10.36, *a*), sau este fix (fig. 10.36,*b*). Se observă, de-a lungul corzii, propagarea unei „creste" de undă spre capătul ei. În cazul *a)* ea se întoarce cu deviere în aceeași parte adică tot ca o creastă. În cazul *b)* unda se întoarce ca o „depresiune" (adîncitură).

În ambele cazuri, perturbația este reflectată la capătul corzii (ca la întîlnirea cu un perete — obstacol), dar felul reflexiei depinde de faptul dacă capătul corzii poate oscila liber transversal, numindu-l în acest caz capăt liber, sau dacă la capăt nu poate apărea nici o oscilație, numindu-l capăt fix.

Așadar „creasta" unei unde transversale se reflectă (se întoarce) la capătul liber ca o „creastă" de undă, iar la capătul fix ca o „depresiune" de undă.

Unda suferă la capătul fix un salt de fază egal cu π sau o „pierdere" de $\frac{\lambda}{2}$ pentru că după reflexie toate punctele vor oscila de cealaltă parte a tubului (corzii), față de unda incidentă.

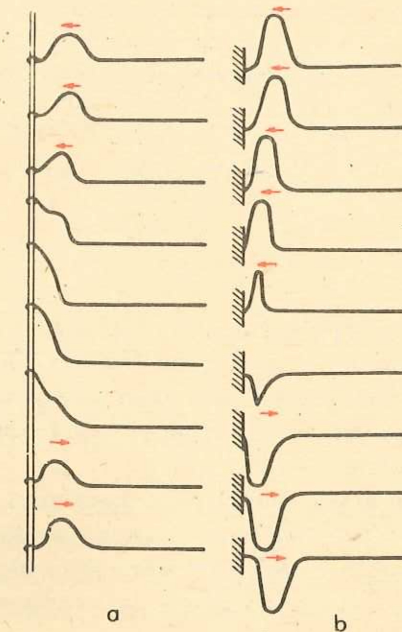


Fig. 10.36. Reflexia unei perturbații care se propagă pe o coardă (desenele sînt distanțate uniform în timp). *a)* La capătul liber faza nu se schimbă, după reflexie; *b)* prin reflexie la capătul fix se schimbă faza cu 180°.

O undă transversală se reflectă la capătul liber fără schimbare de fază, iar la capătul fix cu o schimbare de fază de π sau o „pierdere" de $\frac{\lambda}{2}$.

Concluzii identice se obţin dacă se analizează reflexia unei unde longitudinale.

10.9. DIFRACŢIA

Ce se întîmplă atunci cînd undele care se propagă într-un mediu oarecare întîlnesc obstacole de dimensiuni comparabile cu lungimea de undă?

EXPERIMENT

În calea unor unde plane produse pe suprafaţa apei, în cuva de producere a undelor, se aşază succesiv obstacole liniare de diferite dimensiuni (fig. 10.37, *a*, *b*, *c*) sau se lasă să treacă undele prin deschideri (fante) diferite (fig. 10.37, *d*, *e*, *f*).

În primul caz observăm că undele pătrund cu atît mai mult în „spaţiul umbrei" geometrice din spatele obstacolului cu cît dimensiunile obstacolului devin mai mici. Şi în al doilea caz se observă că regiunea în care se propagă unda în zona de „umbră" este cu atît mai mare cu cît deschiderea este mai mică.

Abaterea unei unde de la direcţia iniţială de propagare la trecerea pe lîngă obstacole şi la traversarea fantelor se numeşte difracţie.

Observaţie. Difracţia este un fenomen distinct de cel de refracţie. Refracţia apare la trecerea unei unde dintr-un mediu în altul cu viteze diferite de propagare; difracţia apare la propagarea undei în acelaşi mediu fără schimbarea vitezei de propagare.

EXPERIMENT

Să repetăm experimentele de mai sus cu unde a căror lungime de undă diferă mult faţă de dimensiunile fantelor (obstacolelor). Figura 10.38 ilustrează efectul unei fante asupra unor unde cu lungimea de undă mult mai mică decît deschiderea sa, respectiv cu lungimea de undă comparabilă cu dimensiunea fantei.

Experienţa arată că factorul determinant pentru fenomenele de difracţie este raportul dintre lungimea de undă şi dimensiunea obstacolului difractant. Difracţia este deosebit de pronunţată atunci cînd dimensiunile obstacolelor difractante sînt comparabile cu lungimea de undă.

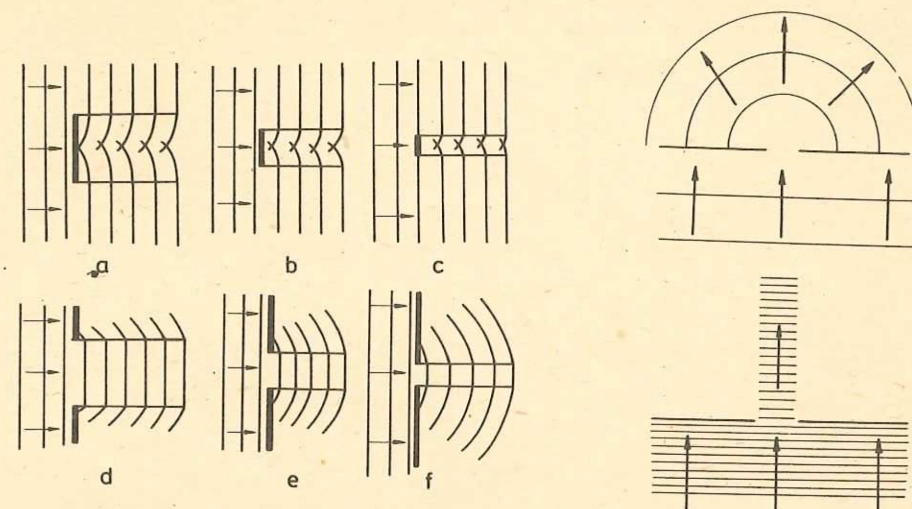


Fig. 10.37. Difracţia undelor pe obstacole şi fante de diferite lăţimi.

Fig. 10.38. Efectul unui orificiu asupra unor unde cu lungimea de undă mult mai mică decît orificiul, respectiv cu lungimea de undă comparabilă cu dimensiunile orificiului.

Fenomenul de difracţie poate fi explicat pe baza principiului lui Huygens. Se consideră frontul de undă care a atins obstacolul ca fiind format dintr-o mulţime de centre (surse) noi de oscilaţii de la care pleacă unde elementare (fig. 10.37). În figura 10.37, *f* se observă formarea unei unde elementare individuale; are loc o difracţie pronunţată.

10.10. INTERFERENŢA. UNDE STAŢIONARE

10.10. 1. Interferenţa undelor

EXPERIMENT

La capetele unei corzi (tub de cauciuc, lanţ de resorturi), se produc, printr-o perturbaţie, două creste de unde, ambele de aceeaşi parte sau una de o parte şi alta de cealaltă parte a corzii (fig. 10.39, *a*, *b*).

Se observă că ambele creste de undă se deplasează de-a lungul corzii nestingherite atît înainte cît şi după ce se întîlnesc. În locul în care crestele de undă se întîlnesc apare o creastă vizibilă mai înaltă (fig. 10.39, *a*) sau deformarea dispare complet (fig. 10.39, *b*). Experimentul poate fi realizat şi cu

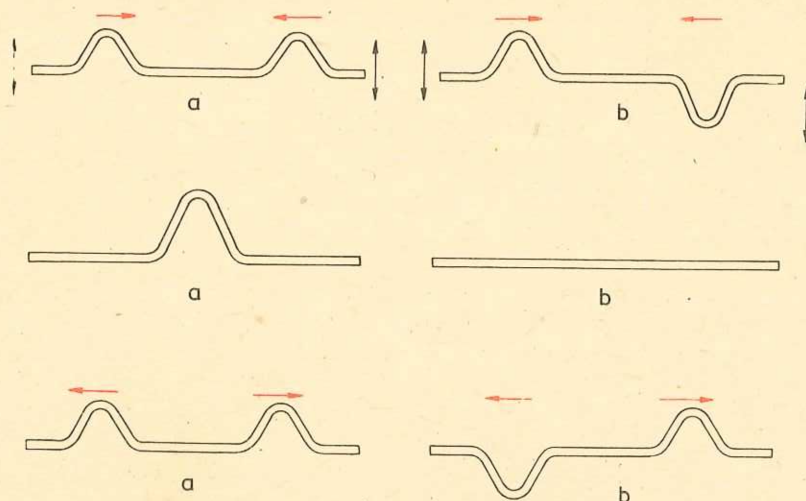


Fig. 10.39. Suprapunerea a două perturbații: *a)* cu aceeași fază; *b)* cu fază opusă.

ajutorul lanțului de pendule. În acest caz, în momentul întîlnirii perturbațiilor, unul din pendule deviază mult mai mult decît celelalte (*a*) sau abia se mișcă (*b*).

Ne întîlnim aici cu o situație deosebită, caracteristică propagării undelor. Peste unul și același lanț de oscilatori pot trece în același timp perturbații diferite, provenite de la două unde, fără ca undele care se produc pe lanțul (mediul) de oscilatori să se perturbe una pe alta. În locul în care cele două unde se întîlnesc ele se suprapun într-un mod foarte simplu: *amplitudinile oscilațiilor produse de cele două unde se adună (algebric)*.

Faptul că după întîlnire undele trec mai departe complet neschimbate, iar în timpul întîlnirii amplitudinile lor se adună, poartă denumirea de suprapunere neperturbată sau de principiul superpoziției neperturbate a undelor.

O importanță deosebită o prezintă cazul în care undele care se întîlnesc au aceeași lungime de undă și determină oscilații de aceeași frecvență (pulsație), unde denumite coerente.

Suprapunerea (compunerea) neperturbată în același loc, dintr-un mediu, a două sau mai multe unde de aceeași lungime de undă sau aceeași pulsație se numește interferență.

Pentru fenomenul de interferență a două unde care se propagă pe aceeași direcție este importantă diferența de drum dintre cele două oscilații care se suprapun în același loc. În figura 10.40, *a*, diferența de drum Δx dintre oscilațiile produse de cele două unde este nulă și deci oscilațiile provocate de ambele

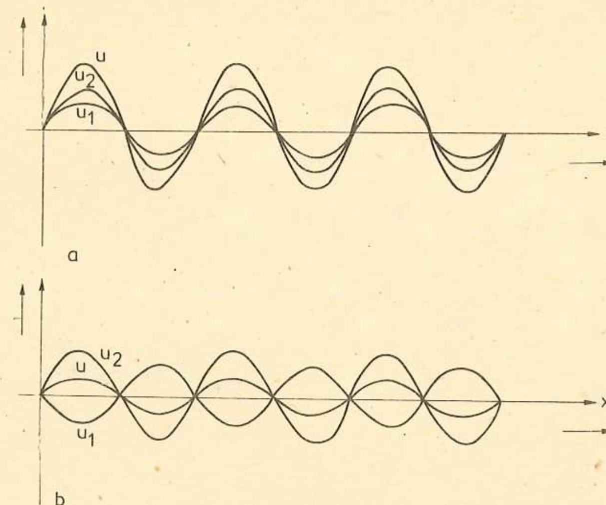


Fig. 10.40. Interferența a două unde cu aceeași lungime de undă: *a)* cînd diferența de drum este nulă și *b)* cînd diferența de drum este de o jumătate de lungime de undă.

unde sînt în fiecare punct de întîlnire, în fază. Cele două unde se „întăresc" una pe alta, oscilația rezultantă se face cu amplitudine maximă. În figura 10.40, *b* diferența de drum dintre oscilațiile produse de cele două unde este $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$. Oscilațiile produse de cele două unde, într-un anumit punct, vor prezenta o diferență de fază $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2} = \pi$. Cele două unde se „slăbesc" reciproc, amplitudinea oscilației rezultante este minimă. Dacă amplitudinile undelor sînt egale, oscilația rezultantă este nulă, cele două unde se „sting" complet una pe alta.

Observație. Două unde care interferă, se intensifică sau se slăbesc la maximum într-un anumit punct, cînd diferența de drum este zero sau $\frac{\lambda}{2}$. Pentru amplitudini egale ele se anulează complet dacă $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$.

Dacă ținem seama de relația (10.30) se observă că la interferență avem:

a) amplificare maximă, cînd diferența de drum $\Delta x = k\lambda = \frac{2k\lambda}{2}$ este un număr par de $\frac{\lambda}{2}$. Din $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ rezultă că pentru $\Delta x = k\lambda$ avem $\Delta\varphi = 2k\pi (k = 0, 1, 2,...)$. Deci un maxim de oscilație corespunde unei diferențe de drum de forma $2k\frac{\lambda}{2}$ sau unei diferențe de fază de $2k\pi$;

b) atenuare maximă, cînd diferenţa de drum $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$. În acest caz rezultă pentru $\Delta\varphi$ condiţia $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$. Adică atenuarea maximă a două unde corespunde unei diferenţe de drum de forma $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ sau unei diferenţe de fază de forma $(2k+1)\pi$.

Zona în care se produce suprapunerea undelor se numeşte cîmp de interferenţă. Să considerăm un punct P din zona de interferenţă a undelor plane care provin de la două centre de oscilaţii C_1 şi C_2, care au aceleaşi pulsaţii (fig. 10.41). Vom presupune că oscilaţiile care ajung în punctul P sînt oscilaţii armonice şi au elongaţiile paralele de forma:

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T'} - \frac{x_1}{\lambda}\right),$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Punctul P va descrie o mişcare rezultată din compunerea celor două oscilaţii şi după cum se ştie de la compunerea oscilaţiilor paralele şi de aceeaşi pulsaţie această mişcare este oscilatorie armonică. Amplitudinea mişcării rezultante este dată de relaţia:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi.$$

Dar cum $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$, avem pentru amplitudinea oscilaţiei rezultante:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)\right]. \qquad (10.34)$$

Rezultă că amplitudinea oscilaţiei în punctul P depinde de amplitudinile oscilaţiilor care se suprapun şi de diferenţa de drum $\Delta x = x_2 - x_1$ dintre oscilaţii în punctul de interferenţă.

În ipoteza că propagarea oscilaţiilor se face într-un mediu în care nu există amortizare, amplitudinea oscilaţiei rezultante va depinde numai de diferenţa de drum Δx dintre cele două oscilaţii.

În situaţia în care această diferenţă de drum este constantă şi amplitudinea oscilaţiei rezultante din punctul P este constantă.

Interferenţa în care toate punctele din cîmpul de interferenţă oscilează cu o amplitudine constantă în timp se numeşte *interferenţă staţionară*.

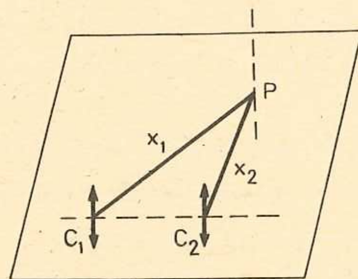


Fig. 10.41. Două centre de oscilaţie de aceeaşi pulsaţie într-un mediu elastic.

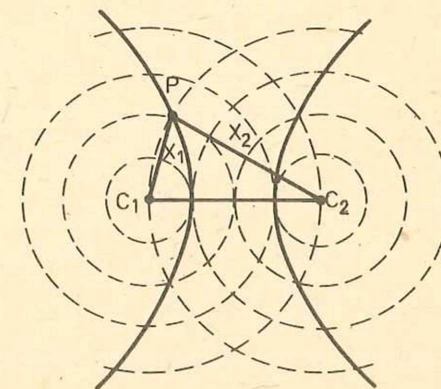


Fig. 10.42. Pentru fiecare valoare a diferenţei de drum se obţin două curbe simetrice în raport cu mediatoarea segmentului C_1C_2.

Valoarea amplitudinii oscilaţiei fiecărui punct din cîmpul de interferenţă depinde de diferenţa de drum Δx. În zona de interferenţă există puncte care au aceeaşi diferenţă de drum faţă de cele două centre de oscilaţii şi care au aceeaşi amplitudine.

Curbele care unesc aceste puncte reprezintă un loc geometric cu proprietatea că diferenţa de drum faţă de două puncte fixe este constantă (hiperbolă). Pentru fiecare valoare a diferenţei de drum se obţin două curbe simetrice faţă de mediatoarea segmentului C_1C_2 (fig. 10.42), de egală amplitudine şi care se numesc franje de interferenţă.

După cum s-a afirmat mai înainte, există valori ale diferenţei de drum pentru care oscilaţia rezultantă poate avea amplitudine maximă sau minimă. Aceste valori, ale diferenţei de drum, se pot obţine din relaţia (10.34) punînd condiţiile:

a) $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 1$, pentru amplitudine maximă $(A = A_1 + A_2)$

sau $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2k\pi$, condiţie din care rezultă:

$$x_2 - x_1 = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2};$$

b) $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = -1$, pentru amplitudine minimă $(A = A_1 - A_2)$ sau

$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2k+1)\pi$, de unde se obţine:

$$x_2 - x_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Aşadar toate punctele din cîmpul de interferenţă pentru care diferenţa de drum este un număr par de $\frac{\lambda}{2}$, oscilează cu amplitudine maximă $A = A_1 + A_2$, iar cele pentru care diferenţa de drum este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$, oscilează cu amplitudinea minimă

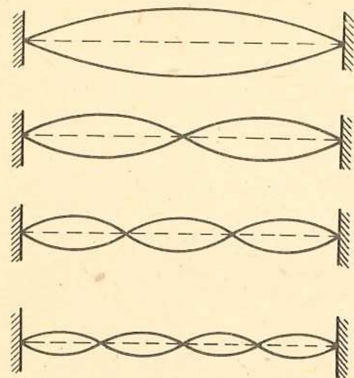


Fig. 10.43. Unde staționare pe un fir întins.

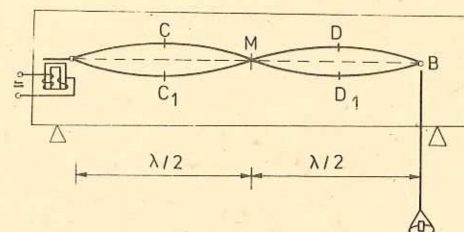


Fig. 10.44. Dispozitiv pentru producerea undelor staționare pe fir.

$A = A_1 - A_2$. Curbele care unesc punctele de maximă și minimă amplitudine se numesc franje de maximă și minimă interferență. Evident pentru cazul particular $A_1 = A_2 = a$ obținem $A = 2a$ pentru amplitudine maximă și $A = 0$ pentru amplitudine minimă.

10.10.2. **Unde staționare.** Să perturbăm o coardă sau un resort elastic lung, provocînd apariția unor unde transversale cu pulsații diferite. Să lăsăm undele să se reflecte la capătul fix sau liber. Se constată că în întregul sistem se produc stări de oscilație caracteristice care nu se „deplasează" în timp ci rămîn pe loc, staționează. Fenomenul se produce datorită suprapunerii undei incidente, produsă de sursa perturbatoare și undei reflectate, la capătul fix sau la cel liber.

Acest caz deosebit de interferență se numește undă staționară. *Unda staționară apare cînd două unde de lungimi de undă egale, care se propagă în sensuri opuse, se suprapun.*

Unda staționară prezintă la distanțe egale cu $\frac{\lambda}{2}$ locuri în care oscilația este stinsă complet, *noduri* de oscilație și între ele locuri în care punctele oscilează cu amplitudine maximă, *ventre* de oscilație.

Dacă în experiențele care pun în evidență undele staționare partea sursei de oscilație se consideră capăt fix atunci figura 10.43 redă cîteva cazuri de formare a undelor staționare pe un fir întins, cînd celălalt capăt este tot fix. Figura 10.44 prezintă aparatul cu care pot fi produse și puse în evidență astfel de unde staționare.

Pentru a explica apariția nodurilor și ventrelor de oscilație să considerăm un punct oarecare P de pe firul întins (fig. 10.45), solicitat simultan de unda incidentă și de unda reflectată. Diferența de drum, dintre aceste două unde, este

$$\Delta x = \left(l + x + \frac{\lambda}{2}\right) - (l - x) = 2x + \frac{\lambda}{2},$$

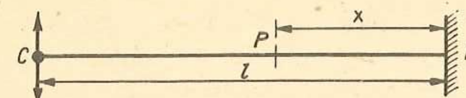


Fig. 10.45. Punctul P de pe fir este antrenat în mișcare atît de unda incidentă cît și de cea reflectată.

unde $\frac{\lambda}{2}$ reprezintă diferența de drum (pierderea) introdusă la reflexia pe capătul fix al firului $\left(\text{reflexie cu pierdere de } \frac{\lambda}{2}\right)$. În ipoteza că firul este un mediu nedisipativ, amplitudinea oscilațiilor rămîne constantă în timp, rezultă că amplitudinea rezultantă este

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi},$$

dar cum $A_1 = A_2 = a$ (unda reflectată are aceeași amplitudine cu cea incidentă) și $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ obținem:

$$A = \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Considerînd cunoscută relația $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ se obține:

$$A = \sqrt{2a^2\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right)\right]} = \sqrt{4a^2 \cos^2\frac{\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right)}$$

deci

$$A = 2a \cos\frac{\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right). \qquad (10.35)$$

Din relația (10.35) observăm că amplitudinea oscilației rezultante este independentă de timp dar variază periodic cu poziția punctului pe fir (cu distanța x față de capătul B al firului din figura 10.45). Toate punctele pentru care $2x + \frac{\lambda}{2} = \frac{2k\lambda}{2}$ oscilează cu amplitudine maximă. Aceste puncte sînt tocmai punctele numite ventre și se află față de punctul de reflexie la distanțele

$$x_v = (2k - 1)\frac{\lambda}{4}, \quad k \geqslant 1 \text{ și întreg.}$$

Punctele pentru care $2x + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, au amplitudinea zero (puncte în repaus), sînt punctele numite noduri și sînt situate față de punctul de reflexie la distanțele

$$x_n = 2k\frac{\lambda}{4} = k\frac{\lambda}{2}, \quad k \geqslant 0 \text{ și întreg.}$$

Poziţia nodurilor şi ventrelor, pe fir, nu se schimbă: punctele care oscilează cu amplitudine maximă, respectiv minimă (zero), rămîn tot timpul aceleaşi, de aici şi numele de unde staţionare.

Pentru cazul firului fixat la cele două capete, reflexia se face cu schimbare de semn pentru elongaţie $\left(\text{pierdere de } \frac{\lambda}{2}\right)$. În fir se formează unde staţionare dacă este îndeplinită condiţia $l = n\frac{\lambda}{2}$, adică lungimea firului este egală cu un număr întreg de $\frac{\lambda}{2}$.

10.11. COARDE ŞI TUBURI SONORE

10.11.1. **Proprietăţile caracteristice ale unui sunet.** În paragraful 10. 6 au fost denumite sunete undele elastice a căror frecvenţă este cuprinsă între 16 Hz—20 kHz.

Un sunet perceput de ureche are anumite proprietăţi care pot fi explicate prin mărimile fizice caracteristice sunetului şi prin particularităţile organului auditiv. Se disting trei proprietăţi fizice: înălţimea, intensitatea şi timbrul.

a) Înălţimea. Senzaţia fiziologică de sunet ascuţit (înalt) şi de sunet grav (jos) este determinată numai de frecvenţa undei sonore.

b) Intensitatea auditivă. Senzaţia fiziologică de intensitate a sunetului se măsoară prin intensitatea auditivă (tăria sunetului). Auzul nu dă pentru două sunete diferite senzaţii în acelaşi raport de tărie ca raportul intensităţilor lor sonore. Dacă se consideră ca intensitate de referinţă I_0, pragul minim de audibilitate $I_0 = 10^{-12}$ W/m² (la 1 kHz), atunci se defineşte (L) nivelul de intensitate sonoră al unui sunet de intensitate I prin relaţia:

$$L = \lg\frac{I}{I_0}. \tag{10.36}$$

Nivelul de intensitate sonoră se măsoară în belli (B) şi în decibelli (dB).

c) Timbrul. Un sunet emis de o sursă sonoră (coardă, tub etc.) are un caracter complex. Alături de sunetele principale, numite sunete fundamentale, o sursă sonoră emite simultan şi cîteva din armonicile sunetului fundamental. De exemplu, frecvenţa fundamentală pentru nota la sau armonica I[a] este de 440 Hz; *orice multiplu întreg al acestei frecvenţe este o armonică superioară.*

Sunetul fundamental şi armonicile care-l însoţesc sînt denumite componentele sunetului.

Caracteristica unui sunet care se exprimă prin numărul componentelor care însoţesc sunetul fundamental şi nivelul lor de intensitate sonoră se numeşte timbrul acelui sunet.

10.11.2. **Surse sonore.** Corpurile care pot oscila cu frecvenţe între 16 Hz — 20 kHz şi care pot genera unde sonore se numesc surse sonore. Printre categoriile de surse sonore importante distingem: *a)* coardele sonore şi *b)* tuburile sonore.

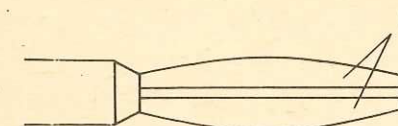


Fig. 10.46. Ancie cu două lame.

a) Coarde sonore. Coarda sonoră este sursa sonoră pentru toate instrumentele de corzi. O coardă sonoră poate fi pusă în oscilaţie în mod diferit, atît longitudinal cît şi transversal. Frecvenţele componentelor emise de o coardă sonoră pot fi determinate cu ajutorul relaţiei:

$$\nu_{pr} = n\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}},\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{10.37}$$

unde ν_{pr} reprezintă frecvenţele proprii ale coardei sonore, care depind de lungimea l a corzii, tensiunea T din coardă şi de μ masa unităţii de lungime a corzii.

b) Tuburi sonore. Tuburile sonore constituie o parte principală a instrumentelor de suflat, avînd rolul de rezonator. Sursa sonoră propriu-zisă o constituie ancia (muştiucul), reprezentată în figura 10.46, prin intermediul căreia se produc oscilaţii ale aerului şi care formează unde staţionare în tubul sonor. Ventrul de oscilaţie se formează întotdeauna la ancie. În figurile 10.47, *a* şi *b* este reprezentat modul în care se formează componentele sunetului în tuburile sonore închise sau deschise.

Se observă că pentru tuburile deschise lungimea l a tubului este un număr întreg de $\frac{\lambda}{2}$:

$$l = n\frac{\lambda}{2},\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ şi din } \lambda_n = vT_n = \frac{v}{\nu_n}$$

rezultă

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l}n \tag{10.38}$$

relaţie prin care pot fi obţinute componentele sunetului emis de un tub sonor deschis.

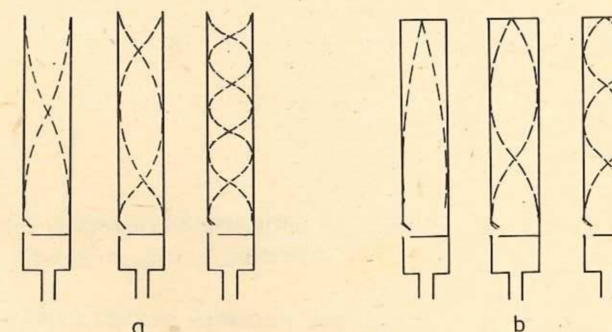


Fig. 10.47. Unde staţionare: *a)* în tuburi deschise şi *b)* în tuburi închise.

Din condiția $l = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$, pentru tuburile închise, se obține pentru componentele sunetului relația:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4l}(2n - 1). \qquad (10.39)$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Un tub deschis cu lungimea $l = 0{,}5$ m emite oscilații cu lungimea de undă $\lambda = 1$ m. Să se calculeze: *a)* ce armonică produce tubul și ce frecvență are sunetul produs? *b)* Se astupă tubul, (și) se cere lungimea de undă a aceleiași armonici a sunetului emis. Viteza sunetului în aer, $v = 340$ m/s.

Rezolvare. a) În acest caz relația (10.38) ne dă $l = n\frac{\lambda}{2}$ sau $n = \frac{2l}{\lambda} = 1$. Rezultă că este emisă prima armonică (sunetul fundamental) cu frecvența $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{1 \text{ m}} = 340$ Hz.

b) Astupînd tubul, obținem din relația (10.39), $l = (2n - 1)\frac{\lambda_1}{4}$ sau dacă punem $n = 1$, $l = \frac{\lambda_1}{4}$ și $\lambda_1 = 4l = 2$ m. Rezultă $\nu = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{340 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 170$ Hz. În acest caz, sunetul devine mai grav.

2. O coardă de violoncel are o lungime $l = 1$ m. Masa corzii este de 50 g. La ce tensiune este supusă coarda dacă ea trebuie să vibreze la frecvența fundamentală de 66 Hz?

Rezolvare. În cazul sunetului fundamental trebuie îndeplinită condiția $l = \frac{\lambda}{2}$ deci $\lambda = 2$ m și pentru că

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{\lambda}$$

unde $\mu = \frac{m}{l}$ rezultă pentru valoarea tensiunii din coardă:

$$T = \mu\nu^2\lambda^2 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot 66^2 \text{ Hz}^2 \cdot 4 \text{ m}^2 = 871{,}2\text{N}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Se dă relația $a_{max} = \frac{kA}{m}$, unde a_{max} este accelerația maximă a unui oscilator armonic, k constanta elastică, A amplitudinea și m masa oscilatorului. Arătați că această relație are dimensiunile unei accelerații.

2. Două resorturi elastice de constante k_1, k_2 sînt legate o dată în serie, o dată în paralel. Ce condiție trebuie să îndeplinească k_1, k_2 așa încît perioadele de oscilație în cele două cazuri să fie egale?

R: nu este posibil, deoarece $T_s/T_p = (k_1 + k_2)/\sqrt{k_1k_2} \geqslant 2$.

3. Un punct material oscilează armonic după o lege sinusoidală. Se măsoară elongațiile x_1 și x_2 la momente diferite și se găsește $x_1 = 6$ cm, $x_2 = 4$ cm iar vitezele corespunzătoare sînt $v_1 = 3$ cm/s, $v_2 = 5$ cm/s. Să se determine: *a)* amplitudinea și perioada oscilației armonice; *b)* accelerația maximă.

R: *a)* $A = \sqrt{\frac{v_1^2x_2^2 - v_2^2x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 6{,}87$ cm; $T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 7{,}025$ s;

b) $a_{max} = 4{,}40$ cm/s^2.

4. Un bloc cu masa $m = 3{,}62$ kg este suspendat de un resort cu constanta elastică $k = 520$ N/m. Un glonț cu masa $m' = 4{,}5$ g este tras de jos în sus cu o viteză $v = 150$ m/s și se oprește în bloc.
Aproximînd mișcarea sistemului bloc-glonț ca o mișcare oscilatorie armonică, să se afle amplitudinea mișcării.

$$A = \frac{m'g}{k}\sqrt{1 + \frac{k\,v^2}{(m + m')\,g^2}} = 1{,}55 \text{ cm}.$$

5. Un corp de masă m cade de la înălțimea h, pe un platan de masă neglijabilă atîrnat de un resort cu constanta elastică k. Știind că după ciocnire corpul rămîne pe platan, să se calculeze amplitudinea mișcării efectuată de sistemul platan-corp.

R: $A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}$.

6. De un dinamometru cu diviziuni între 0 și $F_m = 142$ N și cu lungimea scalei $l = 10$ cm este suspendat un corp care, datorită unei cauze externe, începe să oscileze vertical cu o frecvență $\nu = 2$ oscilații pe secundă. Ce masă are corpul?

R: $k = F_m/l$, $m = k/4\pi^2\nu^2 = 8{,}6$ kg.

7. Un pendul matematic (gravitațional) se fixează de un cadru așezat pe un cărucior. Să se găsească perioada pendulului cînd căruciorul se mișcă; *a)* orizontal cu accelerația a; *b)* vertical în sus cu accelerația a; *c)* vertical în jos cu accelerația $a < g$. Se știu lungimea pendulului l și amplitudinea unghiulară inițială $\alpha_0 \leqslant 5°$.

R: *a)* $2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$; *b)* $2\pi\sqrt{\frac{l}{a + g}}$; *c)* $2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a}}$.

8. Pendulul fixat pe căruciorul de la problema 7 este obligat să se miște cu viteză constantă v pe un cerc de rază R în plan orizontal. Se cere perioada pendulului.

R: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}}}$.

9. Două pendule gravitaționale oscilează în același loc cu frecvențele $\nu_1 = 28$ Hz și $\nu_2 = 7$ Hz. Care este raportul lungimilor lor?

$$\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = 16.$$

10. Cum s-ar putea dovedi experimental că propagarea unei perturbații într-un mediu înseamnă și propagarea — transmiterea de energie?

11. Prin intermediul undelor se transmite energie. Dar impuls se transmite prin unde?

12. Undele de torsiune (forfecare) sînt transversale sau longitudinale?

13. Cum pot fi create unde plane? Dar unde sferice?

14. Dacă mediul este omogen și izotrop, iar sursa de oscilație este punctiformă unda care ia naștere este sferică. Ce fel de undă se va produce, dacă mediul este izotrop dar nu este omogen? Dar dacă este omogen dar nu și izotrop?

15. Undele transversale dintr-o coardă pot fi polarizate. Dar undele sonore sînt polarizate?

16. Dacă două unde interferă, perturbă una din ele propagarea celeilalte?

17. Cînd interferă undele, există o pierdere de energie?

18. Care sînt limitele lungimilor de undă pentru undele sonore în aer? Dar în oțel? Se știe:

$\nu_{min} = 16$ Hz $\qquad v_{aer} = 340$ m/s

$\nu_{max} = 20$ kHz $\qquad v_{oțel} = 5\,000$ m/s.

R: 21,25 m; $17 \cdot 10^{-3}$ m; 312,5 m; $250 \cdot 10^{-3}$ m.

19. O undă sonoră are frecvența de 440 Hz. Care este lungimea de undă a acestui sunet în aer ($v_{aer} = 340$ m/s)? Dar în apă ($v_{apă} = 1\,400$ m/s)?

R: 0,77 m; 3,27 m.

20. Un difuzor are un diametru de 15 cm. La ce frecvență, lungimea de undă a sunetului emis de el, în aer, va fi egală cu diametrul său?

R: $22{,}66 \cdot 10^2$ Hz.

21. O mișcare oscilatorie se propagă sub formă de unde într-un mediu elastic străbătînd în 5 s o distanță de 1 700 m. Cunoscînd lungimea de undă $\lambda = 3{,}4$ m, să se calculeze viteza de propagare a undelor, perioada și frecvența acestora.

R: 340 m/s; 0,01 s; 100 Hz.

22. Să se calculeze lungimea de undă a oscilațiilor cu frecvența de 1,32 kHz știind că acestea se propagă cu viteza de 330 m/s.

R: 0,25 m.

23. Să se calculeze viteza maximă a particulelor mediului prin care se propagă o undă cu frecvența $\nu = 0{,}5$ kHz și cu amplitudinea $A = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ m. Se știe că $\lambda = 0{,}7$ m. Se cere viteza de propagare a undelor în mediul considerat.

R: $v_m = 2\pi\nu A = 7{,}85$ m/s; $v_f = \lambda\nu = 350$ m/s

24. Care este viteza de propagare a undelor transversale într-un fir de cupru cu densitatea relativă $d = 8{,}9$ și secțiunea $S = 1$ mm² întins de o forță $F = 100$ N?

R: $v_t = \sqrt{F/dS} = 106$ m/s.

25. Un fragment de metal este analizat măsurind viteza sunetului într-o bară făcută din acest metal. Bara are masa de 30 kg și volumul de $2 \cdot 10^{-3}$ m³. Viteza sunetului în bară este de 4 000 m/s. Să se calculeze modulul de elasticitate.

R: $24 \cdot 10^{10}$ N/m².

26. O sursă produce oscilații cu frecvența de 50 Hz care se propagă în două medii diferite. Cunoscînd vitezele de propagare $v_1 = 5\,000$ m/s și $v_2 = 1450$ m/s în cele două medii să se calculeze lungimile de undă corespunzătoare.

R: $\lambda_{1,2} = \frac{v_{1,2}}{\nu} = 100$ m; 29 m.

27. Fie $u_1 = 3 \sin 200\,\pi t$ (mm) și $u_2 = 3 \sin\left(200\,\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (mm) ecuațiile care descriu oscilațiile a două surse S_1 și S_2 situate la 6 cm una de alta. Sursele produc oscilații transversale cu elongațiile paralele și care se propagă cu viteza de 80 cm/s pe suprafața unui lichid. Să se determine diferența de fază între mișcările care sosesc în același moment într-un punct situat la distanța d_1 de S_1 și la distanța d_2 de S_2.

R: $200\,\pi\,\frac{d_2 - d_1}{v} - \frac{\pi}{3}$.

28. Fie oscilațiile $u_1 = 3 \sin \frac{2\pi}{T} t$ (mm) și $u_2 = 4 \sin \frac{2\pi}{T} t$ (mm) care produc unde corespunzătoare. Să se calculeze amplitudinea undei rezultate prin interferența celor două unde într-un punct M, știind că diferența de drum este $d = 0{,}50$ cm, viteza de propagare $v = 0{,}5$ cm/s și perioada 4 s.

R: $\Delta\varphi = 2\pi\,d/\lambda$, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} \approx 5$ cm.

29. Prin suprapunerea a două unde produse de două surse care oscilează cu aceeași amplitudine $A_1 = 5$ cm, aceeași frecvență $\nu = 1$ kHz și care sosesc defazate cu $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ într-un punct, rezultă o oscilație cu amplitudinea A. Știind că undele se propagă în mediul respectiv cu viteza $v = 2\,000$ m/s, se cere să se scrie ecuația oscilației rezultante și diferența de drum în punctul considerat.

R: $A = 2A_1 \cos \frac{\Delta\varphi}{2}$, $u = 8{,}65 \cdot 10^{-2} \sin 2\pi\left(\frac{t}{10^{-3}} - \frac{x}{2}\right)$; $x_2 - x_1 = \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\lambda}{6}$.

30. Două surse care oscilează conform ecuațiilor $u_1 = 3 \sin \frac{2\pi}{4} t$ (cm) și $u_2 = 2 \sin \frac{2\pi}{4} t$ (cm) emit unde plane. Să se calculeze *a)* amplitudinea undei rezultante într-un punct în care diferența între drumul parcurs de cele două unde este de $5 \cdot 10^{-3}$ m. Vitezele de propagare ale celor două unde sînt egale și au valoarea $v = 10^{-1}$ m/s. *b)* Ce valoare ar trebui să aibă diferențele de drum parcurse de cele două unde pînă la punctul considerat, pentru ca amplitudinea să fie maximă? Se consideră undele plane.

R: $4{,}9 \cdot 10^{-2}$ m; $2k\,\frac{\lambda}{2}$.

31. O sursă O aflată într-un mediu elastic produce oscilaţii de forma $u = 0{,}25 \sin 100\,\pi t$ (mm). Lungimea de undă a undelor plane longitudinale produse este $\lambda = 10$ m. *a)* După cît timp va începe să oscileze un punct M situat la distanţa $x = 8$ m faţă de sursă? *b)* Să se afle defazajul între sursă şi punctul M. *c)* La ce distanţă pe dreapta OM se află două puncte ale căror oscilaţii sînt defazate între ele cu $\frac{\pi}{6}$?

R: $t = \frac{xT}{\lambda} = 16 \cdot 10^{-3}$ s; $\Delta\varphi = \frac{x}{\lambda}\, 360° = 288°$; 0,833 m.

32. Cum putem localiza experimental poziţiile nodurilor şi ventrelor într-o coardă? Dar într-o coloană de aer?

33. O coardă cu lungimea $l = 15$ m fixată la un capăt primeşte la celălalt capăt impulsuri ritmice transversale de mică amplitudine cu frecvenţa $\nu = 2$ Hz. Viteza de propagare a oscilaţiilor în coardă este $v = 20$ m/s. Se neglijează toate amortizările. Se cer: *a)* lungimea de undă; *b)* numărul de fuse ce se formează în coardă.

R: $\lambda = \frac{v}{\nu} = 10$ m; $N = \frac{2l}{\lambda} = 3$.

PROBLEME RECAPITULATIVE*

1. Un punct material se mişcă pe un cerc de rază $R = 2{,}00$ m. Care sînt distanţele parcurse şi modulele vectorilor deplasare după: *a)* o şesime de cerc; *b)* un sfert de cerc; *c)* o jumătate de cerc; *d)* trei sferturi de cerc; *e)* un cerc întreg?

R: *a)* $\frac{\pi R}{3} = 2{,}10$ m; $R = 2{,}00$ m; *c)* $\pi R = 6{,}28$ m; $2R = 4{,}00$ m;

b) $\frac{\pi R}{2} = 3{,}14$ m; $R\sqrt{2} = 2{,}82$ m; *d)* $\frac{3\pi R}{2} = 9{,}42$ m; $R\sqrt{2} = 2{,}82$ m;

e) $2\pi R = 12{,}56$ m; zero.

2. Un automobil parcurge rectiliniu pe stradă o distanţă $d_1 = 10$ m, face un viraj cu raza $R = 10$ m şi intră într-o stradă perpendiculară pe care merge $d_2 = 10$ m. Să i se deseneze traiectoria. Care sînt: distanţa parcursă şi modulul vectorului deplasare?

R: $d \approx 36$ m; $|\Delta\vec{r}| = 28$ m.

3. Un biciclist se mişcă rectiliniu uniform pe o bicicletă. Cum va arăta traiectoria unui punct de pe periferia (obada) roţii într-un sistem de coordonate legat de: *a)* roată; *b)* rama bicicletei; *c)* Pămînt?

R: *a)* punct; *b)* cerc; *c)* bucle, asemănătoare unor semicercuri (cicloida).

4. Cum se schimbă graficul coordonatei x şi al vitezei v în funcţie de t, dacă schimbăm sensul pozitiv ales pe axa Ox a mişcării?

R: trec în simetricele lor faţă de axa Ot.

5. Să se calculeze vitezele şi acceleraţiile (momentane) mobilelor, dacă legile mişcărilor sînt: *a)* $x = 3 - 2t$; *b)* $x = 3t^2 + 10$; *c)* $x = 2t^3$.

R: *a)* $v = -2$; $a = 0$;
b) $v = 6t$; $a = 6$;
c) $v = 6t^2$, $a = 12\,t$.

* Aceste probleme nu sînt obligatorii.

6. Ecuaţia mişcării (rectilinii) unui mobil este: *a)* $x = 2 + 1{,}5t + t^2$; *b)* $x = \frac{1}{2}At^2 + Bt + C$, unde A, B, C sînt constante. Să se scrie legea vitezei şi a acceleraţiei.

R: *a)* $v = 1{,}5 + 2t$; $a = 2$;
b) $v = At + B$, $a = A$.

7. O şalupă parcurge distanţa dintre două porturi în sensul curgerii rîului în $t_1 = 1{,}00$ h şi împotriva curentului în $t_2 = 2{,}00$ h. În cît timp va parcurge această distanţă un colac de salvare scăpat în apă?

R: $t = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1} = 4{,}00$ h.

8. Un călător aflat într-un tren de lungime $l_1 = 900$ m, care se mişcă cu viteza $v_1 = 54$ km/h, vede un timp $t_1 = 60$ s un tren vecin de lungime $l_2 = 600$ m, care se mişcă paralel cu primul tren şi în acelaşi sens. Care este viteza trenului al doilea? Dacă trenurile se vor mişca acum în sensuri opuse, cît timp va vedea fiecare călător trenul celălalt? Care sistem de coordonate este mai potrivit?

R: *SC* legat de primul călător (tren),
$v_2 = v_1 \pm l_2/t_1 = 25$ m/s $= 90$ km/h sau 5 m/s $= 18$ km/h;
$t_2 = t_1l_1/l_2 = 90$ s; $t_1' = \frac{l_2}{v_1 + v_2} = 15$ s sau 30 s;
$t_2' = \frac{l_1}{v_1 + v_2} = 22{,}5$ s sau 45 s.

9. Două avioane zboară unul spre celălalt cu aceeaşi viteză $v = 576$ km/h fiecare. Care a fost (iniţial) distanţa dintre ele, dacă un semnal sonor (care se propagă rectiliniu uniform cu viteza $c = 340$ m/s), emis de un avion şi reflectat de celălalt, se întoarce înapoi după un timp $T = 68$ s?

R: $d = (c + v)^2\ T/2c = 25$ km.

10. Un autoturism se mişcă cu viteza $v_1 = 22$ m/s în spatele unui autocamion care are viteza $v_2 = 15$ m/s. Cînd distanţa dintre autoturism şi autocamion devine $d_1 = 20$ m, conducătorul autoturismului se angajează în depăşirea autocamionului, dar observă în acelaşi timp un autobuz venind din sensul opus cu viteza $v_3 = 18$ m/s. Ce distanţă minimă d_3 trebuie asigurată între autobuz şi autoturism pentru a efectua în siguranţă manevra de depăşire, astfel ca, după depăşire, autoturismul să fie la distanţa $d_2 = 50$ m în faţa autocamionului?
Care sistem de coordonate este mai potrivit?

R: *SC* legat de camion; $d_3 = (d_1 + d_2)\frac{v_1 + v_3}{v_1 - v_2} = 400$ m.

11. Un tren se mişcă cu viteza $v = 36$ km/h spre răsărit. Un călător de pe platforma vagonului simte vîntul suflînd dinspre nord. Cînd viteza trenului se dublează, călătorul simte vîntul suflînd dinspre nord-est. Care este viteza şi direcţia reală a vîntului (faţă de Pămînt)?

R: $v_0 = v\sqrt{2} = 14{,}1$ m/s dinspre $N - V$.

12. Într-un atelier de reparaţii dintr-o gară loviturile unui ciocan se succed la un interval de timp $T = 1{,}00$ s. Ce interval de repetiţie a loviturilor va înregistra un călător dintr-un tren care se depărtează, respectiv se apropie de gară cu viteza $v = 72$ km/h? Sunetul se propagă rectiliniu uniform cu viteza $c = 340$ m/s.

R: $T' = Tc/(c \mp v) = 1{,}06$ s, respectiv $0{,}95$ s.

13. Un corp porneşte uniform accelerat fără viteză iniţială şi parcurge astfel un drum $d_1 = 6{,}0$ m, după care merge uniform încetinit şi parcurge astfel un drum $d_2 = 4{,}0$ m pînă la oprire. Ştiind timpul total $T = 10{,}0$ s al mişcării, să se calculeze acceleraţiile în acele două mişcări.

R: $a_{1,2} = \pm \frac{2}{d_{1,2}T^2}(d_1 + d_2)^2 = 0{,}33$ m/s², respectiv $-0{,}50$ m/s².

14. De un tren de masă $M = 100$ t, care merge rectiliniu uniform, se desprinde la un moment dat ultimul vagon de masă $m = 10$ t. Acesta parcurge o distanţă $d = 9{,}0$ km pînă se opreşte. La ce distanţă de vagon se va găsi în acest moment trenul, dacă forţa de tracţiune a locomotivei a rămas aceeaşi? Toate forţele de frecare sînt proporţionale cu greutatea.

R: $s = d\frac{M}{M - m} = 10{,}0$ km.

15. Peste un scripete ideal este trecut un fir cu două corpuri de mase m_1, m_2 la capete. Care este raportul maselor m_2/m_1 dacă după un anumit timp corpul cu masa m_2 a coborît cu n = 5-a parte din distanţa pe care el ar parcurge-o în căderea liberă în acelaşi interval de timp?

R: $m_2/m_1 = (n + 1)/(n - 1) = 1{,}5$.

16. Un corp este aruncat vertical în sus cu o viteză iniţială $v_0 = 10$ m/s. Care este viteza v_1 a corpului la timpul t_1, atunci cînd corpul se află la o înălţime egală cu o fracţiune $k = 0{,}19$ din înălţimea maximă la care el poate ajunge? Să se reprezinte pe aceeaşi diagramă viteza şi coordonata corpului în funcţie de timp.

R: $v_1 = \pm v_0\sqrt{1 - k} = \pm 9{,}0$ m/s;
$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g} = 1{,}02$ s şi $19{,}4$ s.

17. Să se împartă înălţimea $h = 100$ m de la care cade liber un corp în $n = 10$ intervale de lungimi $s_i (i = 1, 2, 3, \ldots 10)$, parcurse în acelaşi timp fiecare.

R: $s_i = \frac{2i - 1}{n^2}h (= 1, 3, 5, 7, \ldots, 19$ m$)$.

18. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus, cu aceeaşi viteză iniţială $v_0 = 4{,}9$ m/s, la un interval τ unul după altul. Să se determine τ astfel ca cele două corpuri să se întîlnească la o înălţime egală cu o fracţiune $k = 0{,}36$ din înălţimea maximă la care ele pot ajunge.

R: $\tau = \frac{2v_0}{g}\sqrt{1 - k} = 0{,}8$ s.

19. De la o înălţime $h = 4{,}9$ m cade liber un corp. Cu ce viteză iniţială v_0 trebuie aruncat în jos de la aceeaşi înălţime un al doilea corp, la un interval $\tau = 0{,}5$ s după primul, pentru ca cele două corpuri să se întîlnească chiar la suprafaţa Pămîntului?

R: $v_0 = \frac{g\tau}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2h/g} - \tau}{\sqrt{2h/g} - \tau} = 7{,}35$ m/s.

20. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale $v_{01} = 60$ m/s și $v_{02} = 40$ m/s, corpul *2* la un interval τ după primul. Care sînt limitele permise ale lui τ pentru ca cele două corpuri să se poată întîlni în aer? (Se va lua $g = 10$ m/s².)

R: $2\dfrac{v_{01} - v_{02}}{g} = 4{,}0 \text{ s} < \tau < \dfrac{2v_{01}}{g} = 12 \text{ s}.$

21. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială $v_{01} = 9{,}8$ m/s. După un timp $\tau = 1{,}0$ s se aruncă după el un al doilea corp. Să se afle viteza inițială v_{02} a acestuia astfel ca cele două corpuri să se întîlnească în momentul cînd corpul *2* este la înălțimea sa maximă. Să se reprezinte coordonatele în funcție de timp pe aceeași diagramă.

R: $v_{02} = 7{,}0$ m/s.

22. În drumul unui glonț tras orizontal s-a așezat un paravan de carton la distanța d. Știind diferența de înălțime h dintre pușcă și orificiul făcut de glonț în paravan, să se afle viteza v_0 a glonțului și unghiul α sub care lovește glonțul paravanul (față de direcția orizontală).

R: $v_0 = d\sqrt{g/2h}$; $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2h}{d}$.

23. Un corp a fost aruncat orizontal dintr-un turn și a căzut pe pămînt după $\tau = 0{,}50$ s la distanța $d = 5{,}0$ m (pe orizontală). Să se afle: înălțimea de la care a fost aruncat corpul, viteza inițială v_0, viteza finală v' și unghiul format de ea cu orizontala.

R: $h = \dfrac{1}{2}g\tau^2 = 1{,}22$ m; $v_0 = d/\tau = 10$ m/s;

$v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 11{,}1$ m/s;

$\operatorname{tg}\alpha' = \sqrt{2gh}/v_0$; $\alpha' = 26°21'$.

24. Un corp este aruncat cu viteza $v_0 = 10$ m/s sub un unghi $\alpha_0 = 45°$ față de orizontală. Corpul lovește un perete situat la o distanță $d = 3{,}0$ m. Să se afle: pe ce porțiune, ascendentă sau descendentă a traiectoriei, se produce ciocnirea; la ce înălțime se produce ciocnirea; viteza v' în momentul ciocnirii?

R: ascendentă ($b = 10$ m); $h = d \operatorname{tg} \alpha_0 - \dfrac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} = 2{,}1$ m;

$v' = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 7{,}6$ m/s.

25. Într-o sanie care lunecă liber, fără frecări, pe un plan înclinat de unghi α față de orizontală, este suspendat de tavan printr-un fir un corp. Cu ce unghi θ față de verticală deviază firul în poziția de echilibru relativ a corpului?

R: $\theta = \alpha$ (firul va fi perpendicular pe planul înclinat).

26. Două corpuri de mase $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 2{,}0$ kg sînt așezate pe un plan orizontal și legate între ele printr-un fir orizontal care rezistă pînă la o tensiune maximă $T_{max} = 100$ N. Coeficientul de frecare la alunecare este același pentru ambele corpuri. Cu ce forță orizontală maximă putem trage corpul m_1 pentru a nu se rupe firul în timpul mișcării?

R: $F_{max} = T_{max}\dfrac{m_1 + m_2}{m_2} = 250$ N.

27. Știind că pentru a menține în echilibru un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$, trebuie aplicată corpului o forță minimă normală pe plan de $n = 2{,}5$ ori mai mare decît o forță minimă orizontală, să se calculeze coeficientul de frecare dintre corp și plan.

R: $\mu = \dfrac{\cos \alpha}{n - \sin \alpha} = 0{,}43.$

28. De-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ este lansat în sus un corp cu viteza inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s. Coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0{,}20$. Să se afle: înălțimea h la care se ridică corpul, viteza v' cu care revine corpul înapoi la baza planului, timpul de urcare și timpul de coborîre.

R: $h = v_0^2/2g(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = 4{,}25$ m; $v' = v_0[(\operatorname{tg} \alpha - \mu) : (\operatorname{tg} \alpha + \mu)]^{1/2} = 8{,}16$ m/s;
$t_u = v_0/g\,(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 1{,}2$ s; $t_c = (v_0/g)(\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha)^{-1/2} = 1{,}5$ s.

29. O pană cu unghi de deschidere $\alpha = 30°$ este bătută într-un butuc de lemn. Care trebuie să fie coeficientul de frecare minim între pană și butuc pentru ca pana să nu sară înapoi?

R: $\mu = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}27.$

30. Două corpuri de mase $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 2{,}0$ kg sînt așezate pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ și cuplate între ele printr-o tijă fină paralelă cu planul înclinat. Coeficienții de frecare la lunecare sînt respectiv $\mu_1 = 0{,}20$ și $\mu_2 = 0{,}30$. Să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea din tijă.

R: $a = g\dfrac{(m_1 + m_2)\sin \alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos \alpha}{m_1 + m_2} = 2{,}87$ m/s²;

$T = m_1 m_2 g \dfrac{(\mu_2 - \mu_1)\cos \alpha}{m_1 + m_2} = 1{,}02$ N

31. Se trage un proiectil în direcție verticală, de la suprafața Pămîntului. Să se calculeze înălțimea maximă h la care urcă proiectilul, dacă viteza lui inițială este $v_0 = 10$ km/s și raza Pămîntului $R = 6\,400$ km. Se neglijează frecările și rotația Pămîntului.

(*Indicație.* Se consideră sistemul proiectil-Pămînt un sistem izolat și se aplică legea conservării energiei.)

R: $h = v_0^2 R/(2g_0 R - v_0^2) = 2{,}5 \cdot 10^4$ km.

32. De la distanța h de la suprafața Pămîntului se lasă să cadă liber un corp. Care este viteza lui la suprafața Pămîntului, dacă sînt cunoscute g_0, R_P și h ($h \gg R_P$)?

(*Indicație.* Se aplică legea conservării energiei, pentru sistemul corp-Pămînt.)

R: $v^2 = 2hg_0 \dfrac{R_P}{R_P + h}$.

33. Un vagon cu masa $M = 10$ tone, supus acțiunii unei forțe de frînare constantă, coboară pe un plan înclinat cu unghiul α ($\sin \alpha = 0{,}05$). Vagonul nu are viteză inițială

şi, atinge viteze $v = 12$ m/s, după ce a parcurs distanţa $d = 200$ m. Să se calculeze forţa de frînare ($g = 10$ m/s²).

$$\textbf{R: } F = M\left(g\sin\alpha - \frac{v^2}{2d}\right) = 1\,300 \text{ N.}$$

34. Un automobil cu masa $M = 800$ kg coboară cu viteza iniţială $v_0 = 60$ km/h, pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală ($\sin\alpha = 0{,}04$). Forţa de tracţiune a motorului este constantă. Automobilul soseşte la baza planului cu viteza $v_1 = 90$ km/h, după ce a parcurs distanţa $d = 200$ m. Forţa de frecare dintre cauciucurile automobilului şi drum este $F_f = 1\,000$ N. Să se calculeze forţa de tracţiune F($g = 10$ m/s²).

$$\textbf{R: } F = \frac{M(v_1^2 - v_0^2)}{2d} + F_f - \frac{4Mg}{100} = 1\,400 \text{ N.}$$

35. Un ciocan cu masa $m = 1$ kg loveşte cu viteza $v = 5$ m/s un cui care pătrunde în lemn cu $x = 1$ cm. Să se calculeze forţa de rezistenţă a lemnului ($g = 10$ m/s²). Se va neglija greutatea ciocanului în raport cu celelalte forţe.

$$\textbf{R: } F_r = \frac{mv^2}{2x} = 1\,250 \text{ N.}$$

36. Un pendul gravitaţional simplu de masă $m = 100$ g şi de lungime $l = 80$ cm se îndepărtează de poziţia de echilibru cu un unghi $\alpha = 30°$. *a)* Să se calculeze viteza şi tensiunea din fir cînd pendulul trece prin poziţia de echilibru.

b) Să se demonstreze că pentru o anumită valoare a unghiului α, tensiunea din fir, la trecerea pendulului prin poziţia de echilibru, este egală cu dublul greutăţii. Să se calculeze în acest caz această valoare α_1 a unghiului α.

$$\textbf{R: } a)\ v^2 = 2gl(1 - \cos\alpha);\ v = 1{,}45 \text{ m/s};\ T = mg + \frac{mv^2}{l} = 1{,}24 \text{ N};$$

$$b)\ T_1 = mg\cos\alpha_1 + 2mg(1 - \cos\alpha_1) = 2mg;\ \alpha_1 = 60°.$$

37. De ce deviază ramura unui copac atunci cînd de pe ea îşi ia zborul o pasăre?

R: conservarea impulsului.

38. De un aerostat, aflat în repaus în atmosferă, este legată o scară de sfoară pe care stă un om. Masa aerostatului cu scară este M, iar a omului m. Ce viteză va avea aerostatul, dacă omul începe să urce pe scară cu viteza u *faţă de scară?* Cîtă energie cinetică dezvoltă omul punîndu-se în mişcare?

$$\textbf{R: } v' = -\frac{m}{m+M}u;\ \Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}u^2.$$

39. Doi patinatori de mase $m_1 = 70$ kg şi $m_2 = 50$ kg, ţinînd de capetele unei sfori, stau pe gheaţa lucioasă unul în faţa celuilalt. Primul din ei începe să tragă de sfoară scurtînd-o cu viteza $u = 1{,}20$ m/s. Cu ce viteză se vor mişca patinatorii? (Se neglijează frecările.)

$$\textbf{R: } v_1 = \frac{m_2u}{m_1 + m_2} = 0{,}50 \text{ m/s};\ v_2 = -\frac{m_1u}{m_1 + m_2} = -0{,}70 \text{ m/s.}$$

40. Trei bărci merg una după alta cu viteza v fiecare. În fiecare barcă se află cîte un om, astfel încît masa bărcii şi a omului este M, iar în barca din mijloc mai există doi saci de masă m fiecare. Din barca din mijloc sînt aruncaţi cei doi saci, unul spre barca din faţă, celălalt spre barca din spate, cu aceeaşi viteză *relativă u faţă de barcă* înainte de aruncare. Care vor fi vitezele finale ale bărcilor, dacă sacii sînt aruncaţi: *a)* simultan; *b)* succesiv?

$$\textbf{R: } a)\ v_1 = v + \frac{m}{M+m}u,\ v_2 = v,\ v_3 = v - \frac{m}{M+m}u;$$

$$b)\ v_1 = v + \frac{m}{M+m}u,\ v_2 = v + \frac{m^2u}{M(M+m)};\ v_3 = v - \frac{m(M+2m)}{(M+m)^2}u$$

$$\text{sau } v_1 = v + \frac{m(M+2m)}{(M+m)^2}u;\ v_2 = v - \frac{m^2u}{M(M+m)};\ v_3 = v - \frac{m}{M+m}u.$$

41. Două bile de mase $m_1 = 0{,}173$ kg, $m_2 = 0{,}200$ kg se mişcă pe direcţii perpendiculare cu vitezele $v_1 = 10{,}0$ m/s, respectiv $v_2 = 5{,}0$ m/s. După ciocnire bila m_2 se opreşte. Care va fi viteza primei bile după ciocnire?
Să se traseze diagrama conservării impulsului total.

$$\textbf{R: } \vec{v}_1' = \frac{1}{m_1}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2);\ v_1' = \frac{1}{m_1}\sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2} = 11{,}5 \text{ m/s.}$$

42. Faţă de care puncte se conservă momentul cinetic al unei particule care loveşte oblic şi perfect elastic un perete (fig. 5.8)? Care este momentul cinetic în raport cu normala la perete în punctul de contact?

R: faţă de punctele normalei la perete în punctul de contact; zero.

43. La pendulul conic (fig. 3.61), faţă de care punct se conservă momentul cinetic al particulei şi ce valoare are? Care este variaţia pe unitatea de timp a momentului cinetic faţă de punctul de suspensie?

R: faţă de centrul cercului; $L = mvr = ml\sin^2\alpha\sqrt{gl\cos\alpha}$; $\vec{L}$ este vertical;
$|\Delta\vec{L}/\Delta t| = |\vec{M}| = mgr = mgl\sin\alpha$; $\Delta\vec{L}/\Delta t = \vec{M}$ este tangent la cerc.

44. O particulă se mişcă liber, fără frecare, sub acţiunea forţei de greutate, pe suprafaţa interioară a unei sfere. Să se arate că momentul cinetic al particulei faţă de diametrul vertical al sferei se conservă.

45. Două particule de aceeaşi masă m se mişcă rectiliniu uniform cu viteze egale în sensuri opuse pe două drepte paralele. Să se arate că momentul cinetic total în raport cu orice punct din spaţiu, nu depinde de alegerea acestui punct.

$$\textbf{R: } \vec{L} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times m\vec{v}.$$

46. O bilă de masă $m = 0{,}100$ kg, legată de un centru fix printr-un fir de lungime $l_1 = 0{,}60$ m, execută o mişcare circulară uniformă pe un plan orizontal neted fără frecări cu turaţia $n_1 = 1{,}00$ rot/s. Ce turaţie va avea bila, dacă firul se scurtează pînă la lungimea $l_2 = 0{,}30$ m? Ce lucru mecanic a efectuat forţa care a scurtat firul?

$$\textbf{R: } n_2 = n_1l_1^2/l_2^2 = 4{,}0 \text{ rot/s};\ W = \frac{1}{2}m4\pi^2n_1^2l_1^2(l_1^2/l_2^2 - 1) = 2{,}12 \text{ J.}$$

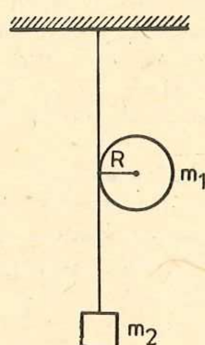


Fig. R—47. Pentru problema 47.

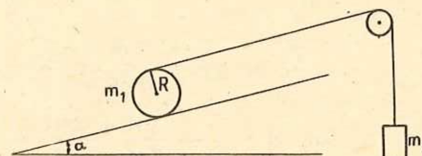


Fig. R—48. Pentru problema 48.

47. Un cilindru de masă m_1 are înfăşurat în jurul său un fir de care este suspendat la capătul liber un corp cu masa m_2 (fig. R—47). Calculaţi tensiunile din fire şi accelerația cu care coboară cilindrul cunoscînd raza R şi momentul de inerţie al cilindrului I.

Indicaţie. Cunoscînd m_1, m_2, R şi I se determină a, T_1 şi T_2 din relaţiile: $m_1a = m_1g + T_2 - T_1$; $0 = m_2g - T_2$; $m_1g\,R = (I + m_1R^2)\varepsilon$, $a = \varepsilon R$.

R: $T_1 = g\left(\dfrac{m_1 I}{I + m_1R^2} + m_2\right)$; $T_2 = m_2g$;

$$a = \frac{m_1gR^2}{I + m_1R^2}.$$

48. Pe un plan înclinat de unghi α este aşezat un corp rotund, omogen, de masă m, rază R şi moment de inerţie I. Corpul rotund este legat de un alt corp de masă m_2, prin intermediul unui fir inextensibil trecut peste un scripete cu inerţia neglijabilă (fig. R — 48). *a)* Care este coeficientul de frecare minim necesar pentru ca să nu alunece corpul? *b)* Să se calculeze accelerația mişcării corpului şi tensiunea din fir. Aplicaţie numerică: corpul este o sferă; $m_1 = m_2$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}20$.

Indicaţie. Din relaţiile: $m_1g \sin\alpha - T - F_f = m_1a_1$; $T - m_2g = m_2a_2$; $a_2 - a_1 = \varepsilon R$; $(F_f - T)\,R = \varepsilon I$, se scot F_f, a_1 şi T. Din condiţia $F_f < \mu g m \cos\alpha$ rezultă $\mu_{min} < \mu$.

R: *a)* $\mu_{min} = 0{,}154 < \mu$, deci nu avem alunecare;
b) $a = 0{,}205\ g$; $T = 0{,}47\ m_1g$.

49. Un fir trecut peste un scripete de inerţie neglijabilă are la un capăt un cilindru plin de masă m_1 şi rază R iar la celălalt un corp de masă m_2 (fig. R—49). Să se afle accelerația mişcării corpului m_2, în cazul cînd cilindrul nu alunecă pe suprafaţa orizontală.

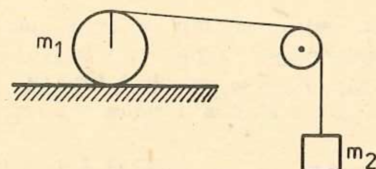


Fig. R—49. Pentru problema 49.

(*Indicaţie.* Dacă cilindrul se rostogoleşte pe plan atunci se poate scrie:

$$T + F_f = (1/2)m_1a;\ m_2g - T = m_2a;\ (T - F_f)\,R = (1/2)\,m_1R^2\,\frac{a}{m_2}$$

şi de aici rezultă a.)

R: $a = \dfrac{g}{1 + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{m_1}{m_2}}$ m/s²

50. Un om cu masa m_1 se deplasează pe circumferinţa de rază r a unui disc orizontal, aflat iniţial în repaus. Discul are masa m_2 şi raza R şi se poate roti uşor în jurul unui ax vertical care trece prin centrul său. Cu ce viteză unghiulară ω se roteşte discul, cînd omul se deplasează cu viteza v faţă de disc?

(*Indicaţie.* Se scrie conservarea momentului cinetic pentru cele două corpuri: $L = I\,\omega + I_1\omega$ unde $L = m_1\,rv$; $I\,\omega$ = momentul cinetic al discului: $I_1\omega$ = momentul cinetic pentru om. De aici rezultă valoarea lui ω.)

R: $\omega = \dfrac{m_1rv}{\dfrac{1}{2}m_2R^2 + m_1r^2}$.

51. Cinci forţe acţionează asupra unui punct material. Punctul de aplicaţie comun al forţelor se află într-unul din vîrfurile unui hexagon regulat, iar extremităţile lor în celelalte vîrfuri. Să se afle rezultanta forţelor, luînd mărimea, celei mai mari dintre ele egală cu 1 N.

R: $R = 3$ N.

52. Două resorturi R_1 şi R_2 de mase neglijabile şi de lungimi egale, se alungesc respectiv cu $\Delta l_1 = 1$ cm, sub acţiunea unei forţe deformatoare $F_1 = 0{,}1$ N şi cu $\Delta l_2 = 120$ mm, pentru o forţă $F_2 = 1$ N. Se suspendă resorturile în două puncte C_1 şi C_2 aflate în acelaşi plan orizontal. Se fixează o tijă rigidă, de masă neglijabilă, la extremităţile libere A_1 şi A_2, ale resorturilor. Apoi se atîrnă o greutate G într-un punct D al tijei.

a) Să se determine poziţia punctului D, caracterizată prin raportul DA_1/DA_2, pentru ca tija A_1A_2 să rămînă orizontală.

b) Să se determine alungirea suplimentară Δl a resorturilor, cînd greutatea G creşte cu $\Delta G = 1$ N.

R: *a)* $DA_1/DA_2 = k_2/k_1 = 5/6$;

b) $\Delta l = \dfrac{\Delta G}{k_1 + k_2} = 5{,}45$ cm.

53. Un cilindru gradat are grosimea $e = 2$ mm, înălţimea $h = 20$ cm şi diametrul interior $D_1 = 4$ cm. Baza cilindrului are diametrul $D_2 = 6$ cm şi grosimea $e = 2$ mm.

a) Să se determine poziţia centrului de greutate al cilindrului gradat, în raport cu punctul aflat la jumătatea înălţimii cilindrului.

b) Se umple cilindrul cu apă pînă la jumătate, să se determine și în acest caz poziția centrului de greutate al cilindrului în raport cu același punct.

$$\text{R: } a)\ x = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{h + e}{2} = 0{,}98 \text{ cm};$$

$$b)\ y = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3}\left[(G_1 + G_2)\,x + G_3\frac{h}{4}\right] = 2{,}84 \text{ cm}.$$

54. Un tub cilindric care conține o anumită cantitate de mercur, plutește în apă scufundîndu-se cu $h = 10$ cm din lungimea sa. Într-un lichid de densitate necunoscută, tubul plutește scufundîndu-se cu $h' = 12{,}5$ cm din lungimea sa. Să se determine densitatea relativă a lichidului, față de apă.

$$\text{R: } d = \frac{h}{h'} = 0{,}8.$$

55. Pe un cărucior se află un vas cilindric în care se găsește apă pînă la înălțimea h, față de baza cilindrului. În peretele cilindrului, pe părți diametral opuse, sînt făcute două orificii identice, cu secțiunea $S = 10^{-3}$ m². Un orificiu se află la înălțimea $h_1 = 0{,}25$ m, iar celălalt la înălțimea $h_2 = 0{,}5$ m, față de baza cilindrului.
Să se determine sensul și intensitatea forței ce trebuie aplicată căruciorului, pentru ca acesta să rămînă în repaus, cînd se deschid orificiile și prin acestea începe să curgă apă.

$$\text{R: } F = 2\rho Sg(h_2 - h_1) = 4{,}9 \text{ N}.$$

56. Un ceas cu pendul care bate secunda ($T_0 = 2$ s) la suprafața Pămîntului este mutat la o altitudine $h = 200$ m în aceeași localitate. Ce influență va avea această mutare asupra mersului ceasului? Cu cîte secunde se va modifica mersul lui în $D = 24$ ore? Raza Pămîntului $R = 6\,400$ km.

$$\text{R: } T = 2\pi\left(1 + \frac{h}{R}\right)\sqrt{\frac{l}{g_0}} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)T_0;$$

$$\Delta t = D\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) = -2{,}70 \text{ s, întîrziere.}$$

57. Densitatea unui corp de mici dimensiuni este $\rho = 2{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³. Acest corp este suspendat de un fir și determinat să oscileze într-un mediu cu densitatea $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m³. Aflați ce relație există între perioada de oscilație T a pendulului care oscilează în acest mediu și perioada lui de oscilație în vid T_0. Se neglijează forțele de frecare.

$$\text{R: } T = T_0\sqrt{\frac{\rho}{\rho - \rho_0}}.$$

58. Știind că energia totală a unui oscilator armonic este $E = \frac{1}{2}kA^2$ și energia potențială $E_p = \frac{1}{2}ky^2$, să se reprezinte într-un sistem de axe E și y graficul energiei cinetice și potențiale a oscilatorului armonic.

59. O oscilație armonică $y = A \sin \omega t$ se propagă ca o perturbație transversală cu viteza $v = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ m/s de la origine de-a lungul axei x, $A = 1 \cdot 10^{-2}$ m și $\omega = \pi/2$ rad/s. Să se determine: *a)* perioada T, frecvența ν și lungimea de undă λ; *b)* ecuația undei; *c)* imaginea momentană (un desen la scară) a perturbației după $t_1 = 4$ s; $t_2 = 6$ s; $t_3 = 9$ s.

60. Legea de propagare a undei plane într-un mediu elastic, omogen și izotrop este $u = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. *a)* Cum se reflectă planeitatea undei în această expresie? *b)* Ce condiție trebuie pusă intervalului de timp t, pentru ca expresia matematică a legii să aibă sens fizic?

R: dacă unda pleacă din $x = 0$ la $t = 0$ atunci $\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \geqslant 0$ sau $t \geqslant \frac{x}{v}$.

61. Două surse de oscilație S_1 și S_2 emit unde de amplitudine $A_1 = 2$ mm și respectiv $A_2 = 5$ mm. Frecvența undelor emise este $\nu = 160$ Hz, iar viteza lor de propagare în mediul considerat este $v = 320$ m/s. Să se afle amplitudinea de oscilație a unui punct situat la distanța $x_1 = 6{,}5$ m de prima sursă și $x_2 = 32/3$ m de a doua sursă, știind că cele două surse oscilează în fază.

R: $A = 6{,}8$ mm.

62. O săniuță de masă m lunecă liber pe un plan înclinat de la o înălțime h, apoi se oprește undeva pe planul orizontal. Ce lucru mecanic trebuie efectuat, pentru a aduce săniuța înapoi la locul de plecare?

R: $2mgh$.

63. De ce vîna de apă dintr-un robinet (în curgere lentă și lină, neturbulentă) se îngustează treptat pe măsură ce coboară?

R: Sv = const, v crește, deci S scade.

64. Putem măsura masele cu un dinamometru, dacă avem la dispoziție și o cutie cu etaloane de masă?

R: da (prin metoda substituției).

65. Un corp este tîrît uniform pe un plan orizontal cu unghiul de frecare φ, cu ajutorul unei forțe care face unghiul α cu orizontala. Pentru ce valoare a unghiului α forța de tracțiune va fi minimă?

R: $\alpha = \varphi$ (unghi de frecare).

66. Doi pescari trebuie să treacă peste un rîu exact în punctul opus. Amîndoi vîslesc cu aceeaşi viteză $v_b = 2,0$ m/s faţă de apă, iar viteza apei este peste tot $v_a = 1,2$ m/s. Primul orientează barca astfel încît înaintează rectiliniu şi ajunge exact în punctul opus într-un timp t_1. Celălalt orientează barca perpendicular pe ţărm, ajunge lîngă celălalt mal, apoi vîsleşte de-a lungul acestui mal pînă ajunge în acelaşi punct final în timpul t_2. Care este raportul t_1/t_2 ?

R: $t_1/t_2 = \sqrt{\dfrac{v_b - v_a}{v_b + v_a}} = 1/2.$

67. Un pescar mergînd cu barca în susul rîului scapă, în dreptul unui pod, un colac în apă. După un timp $\tau = 1/2$ h îşi dă seama de aceasta şi se întoarce înapoi, găsind colacul la distanţa $d = 5,0$ km mai departe de pod. Care este viteza apei, dacă pescarul vîsleşte mereu cu aceeaşi intensitate? Care sistem de referinţă este mai potrivit?

R: SC legat de apă; $v = d/2\tau = 5,0$ km/h.

68. Experienţa arată că particulele mici care cad liber în aer întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă (de frecare) proporţională cu viteza particulei şi orientată în sensul opus vitezei: $\vec{F}_r = -k\vec{v}$, unde k este o constantă de proporţionalitate. Viteza acestor particule atinge destul de repede o valoare maximă (limită) *constantă*. Să se calculeze această viteză limită de cădere liberă, dacă masa particulelor este $m = 10$ mg şi constanta de proporţionalitate $k = 2,0 \cdot 10^{-3}$ N · s/m.

R: $c = mg/k = 4,9$ cm/s.

69. O bilă de masă $m = 100$ g este suspendată printr-un fir de tavanul unui vagon. Cînd vagonul merge uniform frînat, firul cu bila se află în echilibru relativ, deviat cu unghiul $\theta = 60°$, faţă de verticală. Să se afle acceleraţia vagonului şi tensiunea din fir.

R: $a = -g\mathrm{tg}\,\theta = -17$ m/s²; $T = mg/\cos\theta = 1,96$ N.

70. Un tren începe să frîneze uniform, parcurgînd astfel o distanţă $s = 180$ m pînă la oprire. Un pendul simplu suspendat în vagon este deviat (la echilibru relativ) cu unghiul $\theta = 5°$ în timpul frînării. Care a fost viteza iniţială a trenului?

R: $v_0 = \sqrt{2gs \cdot \mathrm{tg}\,\theta} = 17,6$ m/s.

71. Un corp este aruncat (în vid) cu viteza iniţială $v_0 = 20$ m/s sub un unghi $\alpha_0 = 45°$ faţă de orizontală. După cît timp şi la ce înălţime vectorul viteză formează un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala?

R: $t = \dfrac{v_0}{g}\cos\alpha_0(\mathrm{tg}\alpha_0 - \mathrm{tg}\alpha) = 0,63$ s;

$y = \dfrac{1}{2g}v_0^2\cos^2\alpha_0(\mathrm{tg}^2\alpha_0 - \mathrm{tg}^2\alpha) = 6,8$ m.

72. Două corpuri sînt aruncate simultan din acelaşi punct cu aceeaşi viteză iniţială $v_0 = 10$ m/s sub unghiurile $\alpha_1 = 30°$, respectiv $\alpha_2 = 60°$. Care este distanţa d dintre corpuri după $t = 2,0$ s?

R: $d = 2v_0t\sin(\alpha_2 - \alpha_1)/2 = 11,3$ m.

73. O ţintă de pe un deal se vede sub unghiul β faţă de orizontală. Distanţa pe orizontală pînă la ţintă este d. Ştiind viteza iniţială v_0 a obuzului, să se afle unghiul α_0 de tragere. Care este viteza minimă necesară pentru a atinge ţinta?

R: $\mathrm{tg}\alpha_0 = \dfrac{v_0^2}{gd} \pm \sqrt{\dfrac{v_0^4}{g^2d^2} - \dfrac{2v_0^2}{gd}\mathrm{tg}\beta - 1}$; $v_0 \geqslant \sqrt{\dfrac{gd}{\cos\beta}(\sin\beta + 1)}$.

74. Un corp este aşezat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 60°$, fără frecări. Cu ce acceleraţie va luneca liber corpul de-a lungul planului înclinat, dacă acesta este împins cu o acceleraţie orizontală $a' = 5,0$ m/s²?

R: $a = g\sin\alpha \mp a'\cos\alpha = 6,2$ m/s² sau 10,7 m/s².

75. Într-un lift care se mişcă cu o acceleraţie $a' = 2,2$ m/s² îndreptată în sus, este fixat pe podea un plan înclinat neted fără frecări, care formează un unghi $\alpha = 30°$ cu podeaua. Cu ce acceleraţie va coborî liber de-a lungul planului, un corp de masă $m = 1,0$ kg aşezat pe acest plan înclinat? Care va fi apăsarea pe plan?

R: $mg\sin\alpha = m(a - a'\sin\alpha)$; $N - mg\cos\alpha = ma'\cos\alpha$, de unde $a = (g + a')\sin\alpha = 6,0$ m/s²; $N = m(g + a')\cos\alpha = 10,4$ N.

76. De o parte şi de alta a unui dublu plan înclinat (unghi diedru) cu unghiurile $\alpha_1 = 30°$ şi $\alpha_2 = 60°$ faţă de orizontală, sînt aşezate două corpuri de masă m_1, respectiv m_2, legate printr-un fir trecut peste un scripete ideal din vîrful planului. Se neglijează frecările. Diferenţa de nivel dintre corpuri este iniţial $h = 1,00$ m. După $\tau = 0,70$ s cele două corpuri ajung la acelaşi nivel. Care este raportul maselor?

R: $m_2/m_1 = \dfrac{g\tau^2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\sin\alpha_1 + 2h}{g\tau^2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\sin\alpha_2 - 2h} = 3,0.$

77. De ce la elicoptere, pe lîngă elicea mare cu axa verticală, mai există încă o elice mică la coadă, cu axa orizontală?

R: pornind elicea mare, corpul elicopterului s-ar roti în sens invers (conservarea momentului cinetic), ceea ce este împiedicat de elicea mică.

78. Într-o barcă aflată pe un lac stau la capete doi elevi. Masa lor şi a bărcii este M. Primul elev aruncă celui de-al doilea o minge de masă m cu viteza u faţă de apă. Cu ce viteză relativă va lovi mingea pe al doilea elev?

R: $v_{rel} = u\dfrac{M + m}{M}$.

79. Un corp de masă m_1 loveşte cu viteza v_1 un alt corp de masă m_2 aflat în repaus. După ciocnire direcţiile de mişcare ale corpurilor formează unghiurile θ_1, respectiv θ_2 cu direcţia iniţială de mişcare ($\vec{v}_1$) a primului corp. Să se afle vitezele finale.

R: $v_1' = \dfrac{v_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$; $v_2' = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{v_1\sin\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

80. Pe o masă este întins un lanţ. Un capăt al lanţului, de care este prins un corp greu de dimensiuni neglijabile, atîrnă liber peste marginea mesei. Cînd porţiunea de lanţ de pe masă are lungimea l_0, lanţul începe să lunece. Să se calculeze viteza lanţului în momentul cînd el părăseşte masa.

R: $v = \sqrt{gl_0}$

Indicaţie: dacă m este masa lanţului şi M masa corpului greu atunci iniţial: $Mg + m\dfrac{l - l_0}{l}g = \mu m\dfrac{l_0}{l}g$. Scăderea energiei potenţiale $\left(M + m\dfrac{l - l_0}{l}\right)gl_0 + m\dfrac{l_0}{l}g \cdot \dfrac{l_0}{2}$ este egală cu energia cinetică $(M + m)v^2/2$ plus lucrul mecanic al forţei de frecare $\mu m\dfrac{l_0}{l}g \cdot \dfrac{l_0}{2}$.

Nr. colilor de tipar : 20
Bun de tipar : 29.02.1988



Com. nr. 70371/34 030
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
Bucureşti — R.S.R.